

UNIVERSIDAD AUSTRAL  
Facultad de Ciencias Empresariales - Sede Rosario



Tesis Doctoral

SOLUCIONES EXACTAS A PROBLEMAS DE STEFAN CON  
COEFICIENTES TÉRMICOS VARIABLES Y APROXIMACIONES A  
TRAVÉS DE MÉTODOS DE BALANCE INTEGRAL

Mg. JOSÉ A. SEMITIEL

Directora: Dra. ADRIANA C. BRIOZZO

Co-Directora: Dra. JULIETA BOLLATI

*Tesis presentada en la Facultad de Ciencias Empresariales, Sede Rosario,  
para optar al título de*

DOCTOR EN MATEMÁTICA APLICADA Y COMPUTACIONAL

Rosario, 7 de Diciembre de 2023



*Dedicado a  
Luciana, Josefina y Bautista*

# Resumen

En esta Tesis, se obtienen soluciones exactas de tipo similaridad de diferentes problemas de Stefan a una o a dos fases, sobre medios unidimensionales semi-infinitos, homogéneos e isotrópicos con la característica principal de considerar el calor específico y la conductividad térmica variables y dependientes de la temperatura, los cuales en los problemas clásicos de Stefan son considerados constantes. Además, se hallan soluciones analíticas aproximadas a algunos casos particulares de estos problemas a través de métodos de balance integral y se comparan estas soluciones aproximadas con la solución exacta de cada uno de los problemas.

En el **Capítulo 1** se presenta una introducción de esta Tesis. Se hace una breve descripción de los problemas de Stefan clásicos a una y a dos fases. Además, se indica la importancia, desde el punto de vista de la Termodinámica, de considerar a los coeficientes térmicos variables. También, se explicitan los métodos de balance integral para aproximar soluciones a problemas de Stefan unidimensionales a una fase. Por último se detallan los problemas que se estudian en cada uno de los capítulos.

En el **Capítulo 2** se consideran problemas de Stefan unidimensionales a una fase para la fusión de un material semi-infinito con conductividad térmica y calor específico dependientes de la temperatura. Se obtienen soluciones exactas de tipo similaridad imponiendo una condición de tipo Dirichlet, una condición de tipo Neumann o una condición de tipo Robin en el borde fijo. Además, se estudia el comportamiento asintótico del problema con condición de tipo Robin y se muestran algunos ejemplos computacionales de los resultados obtenidos. En una segunda parte, se estudian problemas de conducción de calor que surgen de problemas de Stefan unidimensionales a una fase para la solidificación de un material semi-infinito con conductividad térmica dependiente de la temperatura en los que se impone una condición de tipo Dirichlet o una condición de tipo Robin en el borde fijo. Se prueba la existencia y unicidad de solución de los mismos obteniéndose la denominada función de error modificada  $p$ -generalizada. Por último, se estudia el comportamiento asintótico del problema con condición de tipo Robin. Los resultados obtenidos en este capítulo han sido publicados en [22] y [23]:

J. Bollati, M. F. Natale, J. Semitiel y D. A. Tarzia. Existence and uniqueness of solution for two one-phase Stefan problems with variable thermal coefficients. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 51:103001, 2020.

J. Bollati, M. F. Natale, J. Semitiel y D. A. Tarzia. Existence and uniqueness of the  $p$ -generalized modified error function. *Electronic Journal of Differential Equations*, 1-11, 2020.

En el **Capítulo 3** se estudia la existencia y unicidad de solución de tipo similaridad de problemas de Stefan unidimensionales a una fase para la fusión de un material semi-

infinito gobernados por una ecuación no clásica y no lineal del calor con diferentes tipos de fuentes de calor. En dichos problemas, se asume una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo y, la conductividad térmica y el calor específico son variables y dependientes de la temperatura. Los resultados de este capítulo han sido publicados en [25]:

J. Bollati, M. F. Natale, J. Semitiel y D. A. Tarzia. Exact solution for non-classical one-phase Stefan problem with variable thermal coefficients and two different heat source term. *Computational and Applied Mathematics*, 41:375, 2022.

En el **Capítulo 4** se consideran dos tipos de problemas de Stefan unidimensionales a dos fases en un dominio angular para la solidificación de un material semi-infinito con conductividad térmica y calor específico dependientes de la temperatura. Se obtienen soluciones exactas de tipo similaridad imponiendo condiciones de borde de tipo Dirichlet o de tipo Neumann. También, se le impone al problema con condición de tipo Dirichlet una sobrecondición de tipo Neumann y se determinan coeficientes desconocidos en el proceso de cambio de fase donde se obtienen fórmulas para los mismos bajo ciertas condiciones necesarias y suficientes sobre los datos del problema planteado. Los resultados de este capítulo han sido aceptados para su publicación [26]:

J. Bollati, M. F. Natale, J. Semitiel y D. A. Tarzia. Determination of one unknown coefficient in a two-phase free boundary problem in an angular domain. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 531:127775, 2024.

Por último, en el **Capítulo 5**, se hallan diferentes aproximaciones a problemas de Stefan unidimensionales a una fase correspondientes al proceso de fusión de un material semi-infinito a través de tres métodos: balance integral clásico, balance integral modificado y balance integral refinado. El primer problema considerado está gobernado por la ecuación clásica del calor en el que se le impone una condición de tipo Robin o de tipo Dirichlet en el borde fijo. El segundo problema está definido por una ecuación no clásica del calor con una fuente externa que depende de la evolución del flujo de calor en el borde fijo donde se asumen los coeficientes térmicos constantes y se impone una condición de tipo Dirichlet o de tipo Robin en el borde fijo. El tercer problema está dado por una ecuación no clásica del calor donde se asume la conductividad térmica no lineal, dependiente de la temperatura, y en el que se impone una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo. Del hecho de conocer las soluciones exactas de los problemas planteados, permiten comparar con las soluciones aproximadas analíticas al aplicar el método de balance integral y sus dos variantes, analizando el error cometido en cada caso. Los resultados obtenidos en este capítulo han sido publicados en [21], [24] y [27]:

J. Bollati, J. Semitiel y D. A. Tarzia. Heat balance integral methods applied to the one-phase Stefan problem with a convective boundary condition at the fixed face. *Applied Mathematics and Computation*, 331:1-19, 2018.

J. Bollati, M. F. Natale, J. Semitiel y D. A. Tarzia. Integral balance methods applied to non-classical Stefan problems. *Thermal Science*, 24:1229-1241, 2020.

J. Bollati, M. F. Natale, J. Semitiel y D. A. Tarzia. *Approximate solutions to the one-phase Stefan problem with temperature-dependent thermal conductivity*, Chapter 1, In Heat Conduction: Methods, Applications and Research, pages 1-20. J. Hristov - R. Bennacer (Eds.), Nova Science Publishers, Inc., 2019.

# Agradecimientos

Quiero agradecer, en primer lugar, a mi directora Dra. Adriana C. Briozzo por su gran colaboración en mi formación y por su guía para desarrollar esta Tesis. También, a mi co-directora, Dra. Julieta Bollati por su asistencia, paciencia y su dedicación durante estos años de trabajo en conjunto.

Al Director de la carrera de Doctorado en Matemática Aplicada y Computacional y Vicerrector de Investigación de la Universidad Austral, Dr. Domingo A. Tarzia, por su apoyo humano, por colaborar en mi formación como investigador y por compartir sus conocimientos, saberes y recursos.

A la Directora del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Austral, Dra. María Fernanda Natale, por contribuir a mi formación, siendo guía y apoyo a lo largo de estos años de trabajo en conjunto.

A las instituciones que contribuyeron a mi formación académica: Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, Facultad de Educación de la Universidad Nacional de Cuyo y Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Austral Sede Rosario. Agradezco en especial a esta última de la que soy docente hace más de 17 años, por brindarme la posibilidad de realizar el doctorado y facilitarme un espacio de trabajo confortable con todas las herramientas necesarias a mi disposición.

A mi amor, Luciana, por confiar siempre en mí, por su paciencia, por su apoyo y por ser el sostén de mi vida. A mis hijos, Josefina y Bautista, por ser las personas que le dieron sentido a mi vida y de los que estoy muy orgulloso. A mis padres, Silvia y Carlos, por su generosidad y por ser mis primeros maestros. A mis hermanos, mis compañeros de trabajo y todos mis amigos, por su cariño e incondicionalidad.

*José A. Semitiel, 15 de Septiembre 2023*

# Índice

Resumen . . . . .	II
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Soluciones exactas de problemas de Stefan a una fase con coeficientes térmicos variables</b>	<b>26</b>
2.1. Problemas de Stefan a una fase con conductividad térmica y calor específico dependientes de la temperatura . . . . .	26
2.1.1. Existencia y unicidad de solución del problema de Stefan con condición de tipo Dirichlet en el borde fijo . . . . .	28
2.1.2. Existencia y unicidad de solución de los problemas de Stefan con condiciones de tipo Neumann y de tipo Robin en el borde fijo . . . . .	33
2.1.3. Comportamiento asintótico . . . . .	37
2.2. Problemas de conducción de calor con conductividad térmica dependiente de la temperatura . . . . .	39
2.2.1. La función de error modificada $p$ -generalizada . . . . .	40
2.2.2. Comportamiento asintótico . . . . .	45
<b>3. Soluciones exactas de problemas de Stefan a una fase con coeficientes térmicos variables con fuentes de calor</b>	<b>50</b>
3.1. Problemas de Stefan con fuentes de calor y coeficientes térmicos dependientes de la temperatura . . . . .	50
3.2. Existencia y unicidad de solución del problema de Stefan con término fuente de calor de tipo similaridad . . . . .	52
3.2.1. Caso General . . . . .	52
3.2.2. Caso particular . . . . .	57
3.3. Existencia y unicidad de solución del problema de Stefan con una fuente de calor que depende de la evolución del flujo de calor en el borde fijo . . . . .	58
<b>4. Soluciones exactas de problemas de Stefan a dos fases en un dominio angular con coeficientes térmicos variables</b>	<b>63</b>
4.1. Problemas de Stefan a dos fases en un dominio angular con coeficientes térmicos dependientes de la temperatura . . . . .	64
4.1.1. Existencia y unicidad de solución del problema de frontera libre a dos fases con una condición tipo Dirichlet . . . . .	65
4.1.2. Existencia y unicidad de solución del problema de frontera libre a dos fases con una condición de tipo Neumann . . . . .	74
4.2. Determinación de coeficientes térmicos desconocidos . . . . .	79

<b>5. Soluciones aproximadas de problemas de Stefan a una fase mediante métodos de balance integral</b>	<b>90</b>
5.1. Soluciones aproximadas de un problema de Stefan a una fase con condición convectiva en el borde fijo . . . . .	91
5.1.1. Solución del problema aproximado aplicando el método de balance integral clásico . . . . .	94
5.1.2. Solución del problema aproximado aplicando el método de balance integral modificado . . . . .	97
5.1.3. Solución del problema aproximado aplicando el método de balance integral refinado . . . . .	99
5.1.4. Comportamiento asintótico . . . . .	100
5.1.5. Comparaciones entre soluciones . . . . .	104
5.2. Soluciones aproximadas de un problema de Stefan a una fase para una ecuación no clásica del calor con fuente y una condición de temperatura en el borde fijo . . . . .	106
5.2.1. Solución del problema aproximado aplicando el método de balance integral clásico . . . . .	109
5.2.2. Solución del problema aproximado aplicando el método de balance integral modificado . . . . .	111
5.2.3. Solución del problema aproximado aplicando el método de balance integral refinado . . . . .	112
5.2.4. Comparaciones entre soluciones . . . . .	112
5.3. Soluciones aproximadas de un problema de Stefan a una fase para una ecuación no clásica del calor con fuente y una condición convectiva en el borde fijo . . . . .	113
5.3.1. Solución del problema aproximado aplicando el método de balance integral clásico y análisis de su comportamiento asintótico . . . . .	116
5.3.2. Solución del problema aproximado aplicando el método de balance integral modificado y análisis de su comportamiento asintótico . . . . .	118
5.3.3. Solución del problema aproximado aplicando el método de balance integral refinado y análisis de su comportamiento asintótico . . . . .	119
5.3.4. Comparaciones entre soluciones . . . . .	120
5.4. Soluciones aproximadas de un problema de Stefan a una fase con conductividad térmica no lineal dependiente de la temperatura y una condición de temperatura en el borde fijo . . . . .	121
5.4.1. Solución explícita del problema aproximado aplicando el método de balance integral clásico . . . . .	125
5.4.2. Solución explícita del problema aproximado aplicando el método de balance integral modificado . . . . .	126
5.4.3. Solución explícita del problema aproximado aplicando el método de balance integral refinado . . . . .	127
5.4.4. Comparaciones entre soluciones . . . . .	128
<b>Conclusiones</b>	<b>132</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>134</b>



## Capítulo 1

# Introducción

Esta Tesis tiene por objeto de estudio los problemas de frontera libre que son aquellos problemas de contorno para ecuaciones diferenciales parciales donde interviene además una superficie incógnita, la frontera libre, que separa dos o más regiones, y sobre la cual se conocen datos que dependen del modelo analizado. Según el número de dimensiones en el espacio, en lugar de una superficie se podrá tener una curva o un punto.

## Problemas de Stefan

Un caso particular de los problemas de frontera libre, son los *problemas de cambio de fase* o *problemas de Stefan* (o también conocidos en la literatura como problemas de Lamé-Clapeyron-Stefan). Muchos mecanismos tienen lugar en los procesos de cambio de fase, entre ellos: la transferencia de calor, la absorción o liberación de calor latente, cambios en las propiedades termofísicas, etc. Las diferentes fases de un material se caracterizan por las fuerzas de unión que mantienen los átomos con cierta proximidad. El nombre de *problema de Stefan* surge alrededor de 1950 en homenaje a los numerosos trabajos realizados por el físico J. Stefan (1835-1893) [175–177]. Sin embargo, no fue el único en resolver este problema pues cabe aclarar que unas décadas antes, el matemático G. Lamé (1795-1870) y el ingeniero y físico E. Clapeyron (1799-1864) en [126], estudiaron el problema de solidificación por enfriamiento de un globo líquido (Tierra) arribando a la formulación matemática conocida hoy como problema de Stefan.

Los problemas de Stefan para la ecuación del calor, estudian la distribución de la temperatura de la fase líquida y de la fase sólida, y la evolución en el tiempo de la frontera libre. A dicho problema en particular se lo conoce como *problema de Stefan a dos fases*. A veces, es conveniente reducir el problema, asumiendo que el sólido o líquido se encuentra a la temperatura de cambio de fase y dicha simplificación del modelo es referida en la literatura como *problema de Stefan a una fase*.

Encontrar la solución a un problema de Stefan requiere de la resolución de una ecuación diferencial parcial, de tipo parabólico como la ecuación del calor, sujeta a una condición en la interfase que describe la evolución de la frontera libre. Se supone que la interfase se encuentra a una temperatura conocida y que el flujo de calor a través de ella es discontinuo.

Los problemas de cambio de fase aparecen frecuentemente en procesos industriales y otros problemas tecnológicos de interés [2, 7, 62, 70, 81, 98, 115, 130, 183–185]. Entre las múltiples aplicaciones de los problemas de Stefan se pueden mencionar: solidificación de

aleaciones binarias, oxidación del zirconio y fusión del dióxido de uranio en reactores nucleares en caso de accidentes, almacenamiento de energía térmica de origen solar por cambio de fase, problema de la colada continua, solidificación del pavimento, procesos de ablación térmica, solidificación de la corteza terrestre, etc. Por todo ello, en los últimos años ha aumentado significativamente el interés entre los matemáticos, físicos, químicos e ingenieros de todo el mundo y prueba de ello son los numerosos artículos en revistas científicas y congresos internacionales que se desarrollan periódicamente [1, 3, 6, 8, 11, 12, 16–20, 22–25, 32, 33, 35–38, 42, 48, 49, 54, 57, 60, 61, 67, 71, 76–78, 82–85, 91, 92, 97, 110–112, 116, 122–125, 127–129, 135, 143, 150, 151, 154, 155, 168, 170, 171, 173, 189, 191, 194].

## Problemas de Stefan clásico a una fase

Si un material unidimensional semi-infinito en la región  $x > 0$  se encuentra inicialmente en estado sólido a una temperatura de fusión  $T_f$  y en el borde fijo  $x = 0$  es calentado a una temperatura  $T_0 > T_f$ , entonces en cada instante de tiempo  $t > 0$ , existirá un punto  $x = s(t)$  que separará la fase líquida, representada por el intervalo  $(0, s(t))$ , de la fase sólida, representada por  $(s(t), +\infty)$ , que se encuentra a su temperatura de fusión. La formulación matemática de este proceso es un *problema de Stefan a una fase* y está dado por: hallar la frontera libre  $x = s(t)$  definida para  $t \geq 0$  y la temperatura  $T = T(x, t)$  dada por

$$T(x, t) = \begin{cases} T(x, t) & \text{si } 0 < x \leq s(t), \quad t > 0, \\ T_f & \text{si } x > s(t), \quad t > 0, \end{cases}$$

de manera que:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$T(0, t) = T_0 > T_f, \quad t > 0, \quad (1.2)$$

$$T(s(t), t) = T_f, \quad t > 0, \quad (1.3)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) = -\rho \ell \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (1.4)$$

$$s(0) = 0, \quad (1.5)$$

donde las constantes  $\rho > 0$  es la densidad de masa,  $c > 0$  es el calor específico,  $k > 0$  es la conductividad térmica y  $\ell > 0$  es el calor latente por unidad de masa, y corresponden a la fase líquida del material de cambio de fase. Este problema modeliza el proceso de fusión del material pero se puede plantear de manera análoga el problema de solidificación. Esquemáticamente este modelo puede representarse como en la Figura 1.1 .

La ecuación (1.1) representa la conducción del calor para la fase líquida y puede expresarse como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (1.6)$$

donde  $a^2 = \alpha = \frac{k}{\rho c}$  es la difusividad térmica en la fase líquida.

Las condiciones (1.2) y (1.3) indican la temperatura en el borde fijo  $x = 0$  y la temperatura en la frontera libre  $x = s(t)$ , las cuales son constantes dadas por  $T_0$  y  $T_f$  (temperatura de cambio de fase), respectivamente.

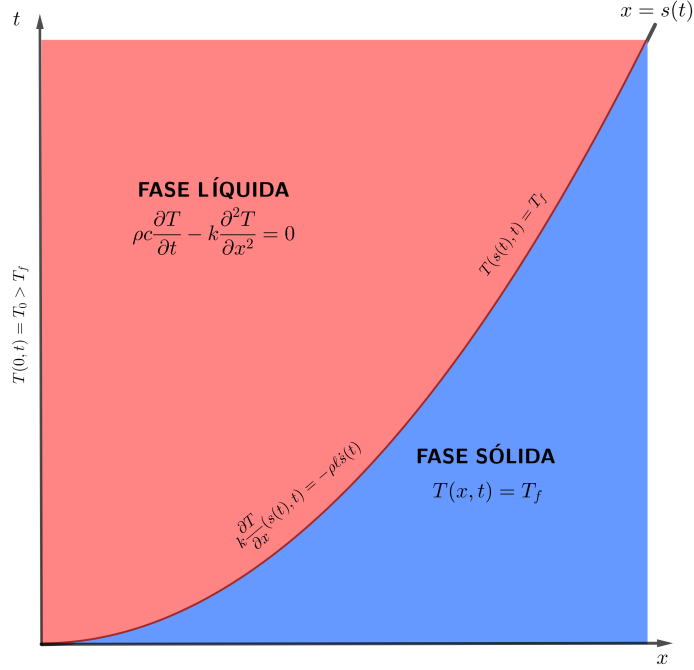


Figura 1.1: Representación del problema de Stefan a una fase dado por (1.1)-(1.5).

La condición (1.4) expresa el hecho que el flujo de calor que atraviesa, en un tiempo infinitamente pequeño, la frontera libre  $x = s(t)$  es igual a la cantidad de calor abandonada por la porción de sólido que se derritió. Esta condición es conocida como la condición de Stefan y se deduce del principio de conservación de la energía.

La condición (1.5) indica que inicialmente el material semi-infinito se encuentra a la temperatura de fusión  $T_f$ .

A pesar de la aparente linealidad del problema (1.1)-(1.5), el problema de Stefan es no-lineal [156]. En efecto, si se deriva (1.3) respecto de  $t$ , se obtiene

$$\frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) \dot{s}(t) + \frac{\partial T}{\partial t}(s(t), t) = 0, \quad t > 0,$$

con lo cual, la condición de Stefan (1.4) se transforma en

$$k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 (s(t), t) = \rho \ell \frac{\partial T}{\partial t}(s(t), t) = \frac{\ell k}{c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(s(t), t), \quad t > 0, \quad (1.7)$$

que indica la no linealidad del problema (1.1)-(1.5).

Una de las herramientas útiles en el estudio teórico del problema de Stefan es el principio del máximo y el Lema de Hopf en su versión parabólica. De estos resultados, puede observarse que si  $(T, s)$  es solución del problema (1.1)-(1.5), entonces debe verificarse:

$$T_f \leq T(x, t) \leq T_0, \quad 0 \leq x \leq s(t), \quad t > 0, \quad (1.8)$$

$$\dot{s}(t) > 0, \quad t > 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, t) < 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) > 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) > 0, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0. \quad (1.10)$$

Uno de los principales métodos de resolución de los problemas de Stefan es el introducido en los años 1860 por F. Neumann (1798-1895) en una serie de notas no publicadas [195], cuyas ideas son las que se retoman en esta Tesis. El método propuesto por Neumann consiste en la observación de que existen condiciones bajo las cuales la conducción del calor, en un cuerpo isótropo y homogéneo, es un fenómeno autosimilar, es decir, que tiene la propiedad de que la distribución de temperatura en cualquier instante de tiempo puede ser obtenida a partir de una distribución de temperatura dada para un instante particular, por medio de una *transformación de similaridad* [9, 153]. Para hallar la solución exacta al problema de Stefan mediante el *método de semejanza*, se considera la ecuación del calor de un cuerpo unidimensional, isótropo y homogéneo dada por (1.6). Dicha ecuación resulta invariante bajo una transformación de las variables  $x$  y  $t$  dada por

$$\xi = \lambda x, \quad \tau = \lambda^2 t, \quad (\lambda \neq 0),$$

y por lo tanto

$$T(x, t) = T\left(\frac{\xi}{\lambda}, \frac{\tau}{\lambda^2}\right) = \Phi_\lambda(\xi, \tau),$$

de lo que resulta la equivalencia:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 \Phi_\lambda}{\partial \xi^2}.$$

Si las condiciones de contorno para la ecuación del calor (1.6) no se modifican bajo el cambio de escala propuesto, entonces la temperatura  $T$  satisface la igualdad

$$T(x, t) = T(\lambda x, \lambda^2 t), \quad \forall \lambda \neq 0.$$

Si en particular se considera  $\lambda = \frac{1}{2a\sqrt{t}}$ , se obtiene:

$$T(x, t) = T\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}, \frac{1}{4a^2}\right) = y\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \quad (1.11)$$

con lo cual, la temperatura  $T$  depende sólo del argumento

$$\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}},$$

llamado *variable de similaridad*. Puede observarse entonces, que la función  $T = T(x, t)$  es una solución de la ecuación del calor (1.6) si y solo si la función  $y = y(\eta)$  es una solución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2 y}{d\eta^2} + 2\eta y = 0, \quad \eta > 0. \quad (1.12)$$

Una consecuencia de la propiedad de autosimilaridad de los fenómenos físicos es la posibilidad de reducir la cantidad de variables que es necesario conocer para describirlos. En particular, desde el punto de vista matemático, resolver un problema de Stefan a partir de buscar soluciones de similaridad permite pasar del estudio del problema original en ecuaciones en derivadas parciales al estudio de un problema en ecuaciones diferenciales ordinarias.

La solución general de (1.12) está dada por

$$y(\eta) = C_1 + C_2 \operatorname{erf}(\eta), \quad \eta > 0, \quad (1.13)$$

con  $C_1$  y  $C_2$  constantes a determinar de las condiciones del problema (1.1)-(1.5) y donde  $\operatorname{erf}$  denota la *función de error* definida por

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-r^2) dr, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (1.14)$$

De la condición (1.2), resulta  $C_1 = T_0$ . Además, para que la condición (1.3) se cumpla, es necesario que el cociente  $\frac{s(t)}{2a\sqrt{t}} = \operatorname{const.} > 0$ , es decir, exista  $\xi > 0$  de manera que

$$s(t) = 2a\xi\sqrt{t}, \quad t \geq 0,$$

y por lo tanto se cumple (1.5).

También, de la condición (1.3) resulta que  $C_2 = \frac{T_f - T_0}{\operatorname{erf}(\xi)}$ . Por último, de la condición de Stefan (1.4), la constante  $\xi$  debe ser la única solución de la ecuación trascendental:

$$z \operatorname{erf}(z) \exp(z^2) = \frac{\operatorname{Ste}}{\sqrt{\pi}}, \quad z > 0, \quad (1.15)$$

donde  $\operatorname{Ste}$  es el *número de Stefan* que se define como una constante adimensional que relaciona el calor específico, el calor latente de cambio de fase de un material y la variación de la temperatura, y está dado por:

$$\operatorname{Ste} = \frac{c(T_0 - T_f)}{\ell} > 0.$$

Por lo tanto el problema de Stefan (1.1)-(1.5) tiene una única solución  $(T, s)$  de tipo similaridad dada por

$$T(x, t) = T_0 + \frac{T_f - T_0}{\operatorname{erf}(\xi)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \quad 0 \leq x \leq s(t), \quad t > 0, \quad (1.16)$$

$$s(t) = 2a\xi\sqrt{t}, \quad t \geq 0, \quad (1.17)$$

donde  $\xi > 0$  es la única solución de (1.15).

Las condiciones iniciales y de frontera que completan los problemas de Stefan, se establecen como consecuencia de hipótesis hechas a partir de resultados experimentales. Una condición de frontera que aparece frecuentemente en los procesos de cambio de fase en cuerpos unidimensionales semi-infinitos, es aquella que representa la imposición de una cierta temperatura en la frontera fija  $x = 0$ . En el problema (1.1)-(1.5) se impone una condición de temperatura dada por la constante  $T_0$  pero existen condiciones de borde más generales.

Una *condición de temperatura o de tipo Dirichlet* en  $x = 0$  se modela matemáticamente como:

$$T(0, t) = T_0(t), \quad t > 0, \quad (1.18)$$

donde se especifica la temperatura en cada instante de tiempo de la frontera fija  $x = 0$ . Se asume que la fuente de calor de la temperatura impuesta  $T_0 = T_0(t)$ , tiene un contacto perfecto con la superficie del material [64, 74].

Otra condición que puede imponerse en el borde fijo  $x = 0$  es una *condición de flujo de calor o de tipo Neumann* dada por:

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = -q(t), \quad t > 0, \quad (1.19)$$

donde en este caso se impone la cantidad de calor  $q = q(t)$  que entra en el borde fijo  $x = 0$  por unidad de tiempo. Aunque, lo que realmente se impone en la práctica, es la cantidad de calor liberada sobre la frontera [2, 64, 179].

Existen otras condiciones que representan más fielmente el proceso de imponer una cierta temperatura en la frontera del medio. Estas condiciones son aquellas en las que el flujo de calor que entra en el borde fijo  $x = 0$  es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la frontera y la temperatura exterior a ella, la cual se desea imponer [64]. Una condición con estas características se denomina *condición convectiva o de tipo Robin* y está dada por:

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = h [T_0(t) - T(0, t)], \quad t > 0, \quad (1.20)$$

donde la constante  $h$  representa el coeficiente de transferencia de calor en el borde fijo  $x = 0$  y  $T_0 = T_0(t)$  es la temperatura ambiente.

## Problemas de Stefan clásico a dos fases

Si un material unidimensional semi-infinito en la región  $x > 0$  se encuentra inicialmente en estado sólido a una temperatura  $T^*$ , con  $T^* < T_f$  (temperatura de cambio de fase) y en el borde fijo  $x = 0$  es calentado a una temperatura  $T_0 > T_f$ , entonces se tiene un *problema de Stefan a dos fases* cuya formulación matemática está dada por: hallar la frontera libre  $x = s(t)$ ,  $t \geq 0$  y la temperatura  $T = T(x, t)$  dada por

$$T(x, t) = \begin{cases} T_2(x, t) & \text{si } 0 < x < s(t), \quad t > 0, \\ T_f & \text{si } x = s(t), \quad t > 0, \\ T_1(x, t) & \text{si } x > s(t), \quad t > 0, \end{cases}$$

de manera que:

$$\rho c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} - k_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (1.21)$$

$$\rho c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} - k_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = 0, \quad x > s(t), \quad t > 0, \quad (1.22)$$

$$T_1(x, 0) = T^* < T_f, \quad x > 0, \quad (1.23)$$

$$T_2(0, t) = T_0 > T_f, \quad t > 0, \quad (1.24)$$

$$T_1(s(t), t) = T_2(s(t), t) = T_f, \quad t > 0, \quad (1.25)$$

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(s(t), t) - k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(s(t), t) = \rho l \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (1.26)$$

$$s(0) = 0, \quad (1.27)$$

donde  $\rho > 0$  es la densidad de masa común en ambas fases,  $k_i > 0$ ,  $c_i > 0$  con  $i = 1, 2$ , representan la conductividad térmica y el calor específico, respectivamente, donde  $i = 1$  corresponde a la fase sólida,  $i = 2$  a la fase líquida y  $\ell > 0$  es el calor latente común a ambas fases. Este problema corresponde a un proceso de fusión pero se puede plantear de manera análoga el problema de solidificación. Esquemáticamente este modelo puede representarse como en la Figura 1.2.

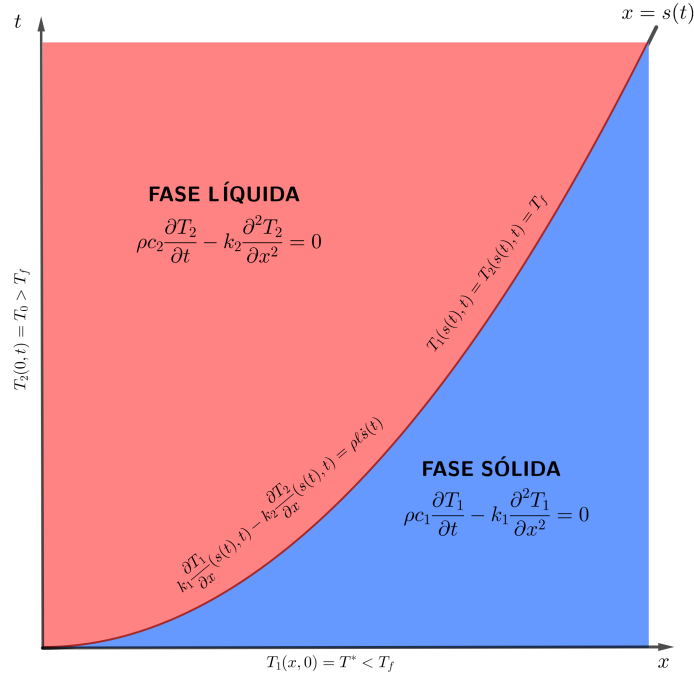


Figura 1.2: Representación del problema de Stefan a dos fases dado por (1.21)-(1.27).

Las ecuaciones (1.21) y (1.22), representan la conducción del calor para la fase sólida ( $i = 1$ ) y la fase líquida ( $i = 2$ ), respectivamente. Las condiciones (1.23), (1.24) y (1.25) indican la temperatura inicial, la temperatura impuesta en el borde fijo  $x = 0$  y la temperatura en la frontera libre  $x = s(t)$  (temperatura de cambio de fase), las cuales son constantes y están dadas por  $T^*$ ,  $T_0$  y  $T_f$ , respectivamente. La condición (1.26) es la condición de Stefan y se deduce del principio de conservación de la energía.

De manera análoga a lo realizado en el problema de Stefan a una fase, se puede hallar la única solución de tipo similaridad  $(T, s)$  para el problema de Stefan a dos fases (1.21)-(1.27) la cual está dada por:

$$T_1(x, t) = T^* + \frac{T_f - T^*}{\operatorname{erfc}(b\xi)} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right), \quad x > s(t), \quad t > 0, \quad (1.28)$$

$$T_2(x, t) = T_0 + \frac{T_f - T_0}{\operatorname{erf}(\xi)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right), \quad 0 \leq x \leq s(t), \quad t > 0, \quad (1.29)$$

$$s(t) = 2a_2\xi\sqrt{t}, \quad t \geq 0, \quad (1.30)$$

donde  $\xi > 0$  es la única solución de la ecuación trascendental:

$$\operatorname{Ste}_2 \frac{\exp(-z^2)}{\operatorname{erf}(z)} - \frac{\operatorname{Ste}_1}{b} \frac{\exp(-b^2 z^2)}{\operatorname{erfc}(bz)} = \sqrt{\pi} z, \quad z > 0, \quad (1.31)$$

siendo  $\text{Ste}_1 = \frac{c_1(T_f - T^*)}{\ell} > 0$  y  $\text{Ste}_2 = \frac{c_2(T_0 - T_f)}{\ell} > 0$  los números de Stefan,  $b = \frac{a_2}{a_1}$  donde  $a_i^2 = \frac{k_i}{\rho c_i}$  ( $i = 1, 2$ ) es la difusividad térmica para cada una de las fases y  $\text{erfc}$  denota la *función error complementaria* definida por:

$$\text{erfc}(z) = 1 - \text{erf}(z), \quad z \in \mathbb{R}. \quad (1.32)$$

## Coeficientes térmicos variables

En la formulación clásica del problema de Stefan a una fase (1.1)-(1.5) o a dos fases (1.21)-(1.27), se establecen ciertos supuestos sobre los factores físicos involucrados en el proceso de cambio de fase con el fin de simplificar la descripción del modelo. Uno de estos supuestos, es considerar la conductividad térmica  $k$ , el calor específico  $c$ , el calor latente  $\ell$  y la densidad del material  $\rho$ , constantes positivas. Sin embargo, existen diferentes argumentos de la Termodinámica que motivan a resolver problemas de Stefan con coeficientes térmicos variables.

En los cálculos ingenieriles se acostumbra a utilizar coeficientes térmicos medidos fenomenológicamente, pero para algunos materiales los valores obtenidos en tablas no son adecuados para predecir dichos coeficientes térmicos con una precisión satisfactoria pues dependen de otros factores. Por ejemplo, el mecanismo de conducción térmica de un gas puede explicarse a nivel molecular utilizando los conceptos básicos de la teoría cinética de los gases. La energía cinética de una molécula está relacionada con su temperatura, pues las moléculas en la región de alta temperatura tienen velocidades mayores que aquellas en una región de baja temperatura. Las moléculas tienen un movimiento continuo aleatorio y cuando chocan entre sí intercambian energía y cantidad de movimiento o ímpetu. Cuando una molécula se mueve de una región de alta temperatura a una región con menor temperatura, transporta energía cinética de una hacia la otra. Después de chocar con moléculas más lentas, cede parte de su energía a las moléculas de menor contenido energético. De esta manera la energía térmica se transfiere de las regiones con mayor temperatura a las regiones de menor temperatura en un gas mediante la interacción molecular. De acuerdo a esta descripción, mientras más rápido se mueven las moléculas, más rápido transportarán energía. Por consiguiente, la propiedad de transporte llamada conductividad térmica depende de la temperatura del gas [119].

Otro ejemplo, son las aletas que están diseñadas físicamente para aumentar el área de superficie en contacto con el fluido refrigerante que rodea el medio previsto. El análisis de conducción de calor de las aletas es de gran interés ya que se utilizan en muchas aplicaciones industriales, como unidades de aire acondicionado, sistemas de refrigeración de procesadores y microprocesadores, sistemas de refrigeración, intercambiadores de calor, álabes de turbinas de gas y radiadores de automóviles. Hay varias soluciones analíticas disponibles para predecir la distribución de temperatura de las aletas pero se basan en la suposición de que todas las propiedades termofísicas, incluida la conductividad térmica y calor específico, son constantes. Para la mayoría de las situaciones reales con una gran diferencia de temperatura entre la base de la aleta y su punta, se debe tener en cuenta la variación de la conductividad térmica del material de la aleta con la temperatura. Por ejemplo, los radiadores de tubo de calor/espacio con aletas tienen aletas con conductividad térmica dependiente de la temperatura [165].



Para propiedades termofísicas constantes del medio, la ecuación del calor está representada como ya hemos visto por (1.1). Sin embargo, para la mayoría de los materiales, los coeficientes térmicos son variables y dependientes de la temperatura. Una forma de deducir la ecuación del calor, asumiendo la densidad del material  $\rho > 0$  constante y el calor específico  $c = c(T)$  y la conductividad térmica  $k = k(T)$  variables y dependientes de la temperatura  $T = T(x, t)$ , se obtiene en [101] y está dada por:

$$\rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0. \quad (1.33)$$

En los problemas clásicos de Stefan, el calor específico y la conductividad térmica del material son constantes. Desde la década de 1970, los investigadores han comenzado a adoptar un modelo más realista de representación de parámetros dependientes de la temperatura debido a los recientes avances tecnológicos [4, 5, 21, 28–31, 43–47, 51, 53, 65, 66, 72, 73, 100, 118, 120, 121, 132, 145–148, 152, 159–162, 172, 178, 182, 192, 201].

En 1951, M. Storm en [178] introdujo una ecuación para la conducción del calor donde los parámetros térmicos de los metales simples dependen de la temperatura y verifican cierta relación matemática, lo cual resultó ser de gran motivación para investigaciones posteriores. En 1985, C. Rogers en [159], obtiene la solución exacta de un problema de Stefan a dos fases con condición de tipo Neumann en el borde fijo para materiales de tipo Storm. En 1999, A. Briozzo, M. Natale y D. Tarzia en [50] consideran un problema de Stefan para la ecuación no-lineal de conducción del calor que admite una clase de solución exacta análoga a la solución clásica dada por Lamè-Clapeyron en [126]. Consideran además en el borde fijo una condición de temperatura y una sobrecondición de flujo de calor en un material semi-infinito para el proceso de cambio de fase de materiales de tipo Storm y determinan la temperatura y los coeficientes térmicos a partir de los datos, dependiendo si la frontera es libre o móvil. En 2000, M. Natale y D. Tarzia en [145], consideran un problema de Stefan a dos fases para materiales de tipo Storm. Se obtienen soluciones exactas para el problema en el que se impone una condición de temperatura en el borde fijo y para el problema en el que se impone una condición de flujo en el borde fijo. En 2014, A. Briozzo y M. Natale en [43], consideran un problema de Stefan a una fase donde se asume que la capacidad térmica y la conductividad térmica satisfacen la condición de Storm. Se obtienen soluciones explícitas de tipo similaridad para el problema con condición de temperatura en el borde fijo y para el problema en el que se impone una condición de flujo en el borde fijo. En 2018, A. Briozzo en [41] considera un problema de Stefan similar donde la conductividad térmica y el calor específico satisfacen la condición de Storm pero se determinan coeficientes térmicos a partir de imponer en el borde fijo un condición de flujo y una sobrecondición convectiva.

En 2003, M. Natale y D. Tarzia en [146], consideran un problema de Stefan a una fase para la ecuación de conducción del calor no lineal con un término convectivo. En el mismo consideran la conductividad térmica variable de la forma  $k(T, x) = \rho c \frac{1+dx}{(a+bT)^2}$  donde  $a, b, d$  son parámetros positivos tal que  $a + bT_f > 0$ . En dicho problema encuentran solución explícita imponiendo una condición de flujo en el borde fijo. En 2006, los mismos autores en [147], consideran un problema de Stefan a una fase con conductividad térmica variable de la forma  $k(T) = \frac{\rho c}{(a+bT)^2}$  donde  $a + bT_f > 0$ . Obtienen soluciones explícitas de dos problemas: el de temperatura constante en el borde fijo y el problema que surge imponiendo una condición de flujo en el borde fijo.

En 2014, A. Briozzo y M. Natale en [44] plantean dos problemas de Stefan: uno, con condición de temperatura en el borde fijo y, el otro, con condición de flujo en el borde fijo, para la ecuación no clásica del calor en la que interviene una función de control con coeficientes térmicos no lineales y dependientes de la temperatura  $\rho = \rho(T)$ ,  $c = c(T)$  y  $k = k(T)$ . Si bien los coeficientes térmicos no adoptan una forma particular, bajo ciertas hipótesis, se prueba existencia de solución de tipo similaridad.

En los últimos tres años, varios estudios han demostrado que modelizar los parámetros térmicos como funciones de la temperatura pueden describir los procesos de cambio de fase con mayor precisión y realismo y pueden ser más útiles para aplicaciones físicas e industriales [17, 18, 22, 23, 25, 32, 33, 35–38, 76, 122–125, 149, 150].

Estudios recientes han demostrado que las propiedades térmicas de los materiales admiten un comportamiento no lineal con respecto a la temperatura y los investigadores se han dado cuenta de que modelar las relaciones funcionales  $\rho = \rho(T)$ ,  $c = c(T)$  y  $k = k(T)$  dependen del tipo de ajuste de correlación de datos, como ley de potencia, polinomial o exponencial. Debe notarse que dada la no linealidad del problema de Stefan clásico, debido a la condición de Stefan, en el caso de coeficientes térmicos variables dependientes de la temperatura, se tiene una doble no linealidad.

En 1974, S. Cho y J. Sunderland en [73] estudiaron un problema a dos fases con condición de temperatura en el borde fijo para un material unidimensional semi-infinito con calor específico constante y conductividad térmica dependiente de la temperatura. Tal dependencia se asume lineal, la cual es una buena aproximación de cómo actúan la mayoría de los materiales, como por ejemplo, el agua. En dicho trabajo se obtienen soluciones exactas para la temperatura en ambas fases y la frontera libre que separa ambas fases transformando el problema de Stefan en un problema diferencial ordinario donde interviene la función que denominan *función error modificada* definida como la solución  $\phi_\delta = \phi_\delta(\eta)$  de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d}{d\eta} \left( (1 + \delta\phi_\delta) \frac{d\phi_\delta}{d\eta} \right) + 2\eta \frac{d\phi_\delta}{d\eta} = 0, \quad (1.34)$$

con las condiciones iniciales:  $\phi_\delta(0) = 0$  y  $\phi_\delta(+\infty) = 1$ , donde  $\delta \geq -1$  es el coeficiente que caracteriza a la conductividad térmica lineal respecto a la temperatura y que está dada por:  $k(T) = k_0 \left( 1 + \delta \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} \right)$ . En dicho trabajo S. Cho y J. Sunderland, aseguran que la solución del problema diferencial ordinario definido por la ecuación (1.34) con las condiciones iniciales  $\phi_\delta(0) = 0$ ,  $\phi_\delta(+\infty) = 1$ , puede ser obtenida mediante métodos numéricos. Sin embargo, en 2017, A. Ceretani, N. Salva y D. Tarzia en [65], prueban existencia y unicidad de solución analítica y no negativa de la función error modificada.

En 1987, D. Oliver y J. Sunderland en [152] proponen el mismo problema planteado por S. Cho y J. Sunderland en [73] con la excepción que en este caso tanto la conductividad térmica como el calor específico en cada fase son variables y lineales con respecto a la temperatura. En el mismo obtienen soluciones semi-analíticas al problema de Stefan a dos fases donde se impone una condición de temperatura en el borde fijo. Al problema de Stefan lo transforman en un problema diferencial ordinario donde interviene nuevamente la función error modificada definida como la solución  $\phi_{\gamma\delta} = \phi_{\gamma\delta}(\eta)$  de la ecuación diferencial

ordinaria de segundo orden:

$$\frac{d}{d\eta} \left( (1 + \delta\phi_{\gamma\delta}) \frac{d\phi_{\gamma\delta}}{d\eta} \right) + 2\eta(1 + \gamma\phi_{\gamma\delta}) \frac{d\phi_{\gamma\delta}}{d\eta} = 0, \quad (1.35)$$

con las condiciones iniciales  $\phi_{\gamma\delta}(0) = 0$ ,  $\phi_{\gamma\delta}(+\infty) = 1$  y donde las constantes  $\gamma > -1$ ,  $\delta > -1$  dependen de los coeficientes que caracterizan a la conductividad térmica y al calor específico lineales con respecto a la temperatura dadas por  $k(T) = k_0 \left( 1 + \alpha \frac{T-T_f}{T_0-T_f} \right)$  y  $c(T) = c_0 \left( 1 + \beta \frac{T-T_f}{T_0-T_f} \right)$ , respectivamente. Recientemente en 2020, A. Ceretani, N. Salva y D. Tarzia en [67], prueban existencia y unicidad de solución no negativa, acotada y analítica de la función error modificada definida por (1.35) con las condiciones iniciales  $\phi_{\gamma\delta}(0) = 0$ ,  $\phi_{\gamma\delta}(+\infty) = 1$ . También, en el mismo año, L. Bougoffa y A. Khanfer en [36], obtienen solución explícita del mismo problema pero prueban existencia y unicidad de solución de una forma diferente, obteniendo cotas superiores e inferiores para la solución del modelo. En 2021, L. Bougoffa, R. Rach y A. Mennouni en [38], retoman este problema en el que extienden el análisis del mismo y donde obtienen una solución aproximada mediante el método de descomposición de Adomian.

En 2018, A. Ceretani, N. Salva y D. Tarzia en [66] obtienen única solución exacta de tipo similaridad de un problema de Stefan a una fase para la solidificación de un material semi-infinito  $x > 0$ , con conductividad térmica de la forma  $k(T) = k_0 \left( 1 + \beta \frac{T-T_f}{T_0-T_f} \right)$ ,  $\beta > 0$  y con una condición de tipo Robin en el borde fijo  $x = 0$ . La existencia y unicidad de solución de dicho problema queda garantizada probando la existencia y unicidad de solución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d}{d\eta} \left( (1 + \beta\phi) \frac{d\phi}{d\eta} \right) + 2\eta \frac{d\phi}{d\eta} = 0, \quad 0 < \eta < \lambda, \quad (1.36)$$

con las condiciones  $(1 + \beta\phi(0)) \frac{d\phi}{d\eta}(0) - \gamma\phi(0) = 0$  y  $\phi(\lambda) = 1$  con  $\gamma > 0$ , cuya solución  $\phi = \phi(\eta)$  es la denominada *función de error modificada generalizada*.

En 2020, A. Kumar, A. Singh y R. Rajeev en [125] plantean un problema de Stefan a una fase para la fusión de un material semi-infinito donde se impone una condición de temperatura en el borde fijo  $x = 0$  y la conductividad térmica es variable y dependiente de la temperatura de la forma:  $k(T) = k_0 \left( 1 + \beta \left( \frac{T-T_f}{T_0-T_f} \right) t^{-\alpha/2} \right)$  con  $\alpha$  y  $\beta$  constantes positivas. Se obtienen soluciones aproximadas de dicho problema a través del método de Tau.

En ese mismo año, estos autores en [123], consideran un problema de Stefan unidimensional a una fase con una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo con conductividad térmica y calor específico dependientes de la temperatura dados por:

$$k(T) = k_0 \left( 1 + \delta \left( \frac{T-T_f}{T_0-T_f} \right)^p \right), \quad c(T) = c_0 \left( 1 + \beta \left( \frac{T-T_f}{T_0-T_f} \right)^q \right), \quad (1.37)$$

respectivamente, donde  $T$  es la temperatura a ser determinada,  $T_0$  es la temperatura inicial impuesta en la condición de tipo Dirichlet,  $T_f$  es la temperatura de cambio de fase,  $p, q$  son constantes no negativas,  $\beta, \delta$  son constantes positivas, y  $k_0, c_0$  son los coeficientes térmicos de referencia de la conductividad térmica y el calor específico, respectivamente. En dicho trabajo obtienen solución exacta para los casos  $\beta = \gamma, p = q = 1$  y  $p = q = 2$

en (1.37). Para el caso general, obtienen soluciones aproximadas a través del método de Tau. En [122] consideran el mismo problema de Stefan pero imponiendo una condición convectiva en el borde fijo  $x = 0$ , en el que obtienen existencia y unicidad de solución de tipo similaridad para el caso  $\beta = \gamma$ ,  $p = q = 1$  en (1.37) y soluciones numéricas a través del método de Tau para el caso general.

En 2021, L. Bougoffa y A. Khanfer en [37], obtienen soluciones de tipo similaridad para un problema de Stefan no clásico a una fase, en donde la ecuación del calor que gobierna el problema contiene una fuente de calor, y los coeficientes térmicos son variables de manera lineal con respecto a la temperatura (en (1.37)  $p = q = 1$ ) y donde se impone una condición de borde de tipo Robin.

En 2023, L. Bougoffa, S. Bougouffa y A. Khaner en [35], consideran el mismo problema de Stefan a una fase donde se impone una condición de temperatura en el borde fijo y se consideran los coeficientes térmicos variables de orden  $p$ , es decir de la forma (1.37) con  $\beta \neq \delta$ ,  $\beta > -1$ ,  $\delta > -1$  y  $p = q > 0$ . En este trabajo, se obtienen soluciones aproximadas implícitas del problema.

## Métodos de aproximación por balance integral

Las soluciones explícitas o exactas de los problemas de Stefan nos proporcionan un conocimiento perfecto del proceso de estudio del problema de cambio de fase, sin embargo hallar este tipo de soluciones no es tarea sencilla. Debido a la naturaleza no lineal de los problemas de Stefan, las soluciones analíticas se limitan a unos pocos casos y se hace necesario el estudio de métodos de aproximación de soluciones.

Uno de los métodos de aproximación, estudiados en la presente Tesis, es el *método de balance integral calórico* introducido en 1958 por T. Goodman [96], como una adaptación del método integral de Karman-Pohlhausen, que se trata de una técnica matemática aproximada para resolver problemas de transferencia de calor y particularmente para determinar la ubicación de la frontera libre en problemas de conducción de calor que involucran un cambio de fase. Este método consiste en transformar la ecuación del calor en una ecuación diferencial ordinaria en el tiempo asumiendo un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial.

Dado que se han encontrado soluciones exactas para muchos problemas de transferencia de calor, el método de balance integral ha tenido su mayor impacto en los problemas de Stefan, donde se pueden encontrar muy pocas soluciones exactas. Obviamente, existen otras técnicas de solución aproximada, como métodos numéricos, soluciones de perturbación y métodos de rayos.

Uno de los mecanismos de la conducción del calor es la difusión, la excitación en el borde fijo  $x = 0$  (por ejemplo, una condición de temperatura, un flujo o una condición convectiva) no se propaga inmediatamente a todo el material  $x > 0$  sino que su efecto se percibe en un intervalo acotado  $(0, \delta(t))$ , para cada tiempo  $t > 0$ , fuera del cual la temperatura permanece igual a la temperatura inicial. El método del balance integral introducido por Goodman, postula la existencia de una función  $\delta = \delta(t)$  que mide la capa térmica, es decir, la distancia hasta la cual penetra el calor. En los problemas de cambio de fase, a esta capa térmica, se la asume como la frontera libre, es decir  $\delta(t) = s(t)$ .

## Método de balance integral clásico

Se ilustra a continuación cómo aplicar el método de balance integral al problema de Stefan a una fase (1.1)-(1.5) considerando, sin pérdida de generalidad,  $T_f = 0$ . Si la temperatura  $T$  satisface la ecuación del calor (1.1) en  $(0, s(t))$ , entonces también se verifica

$$\int_0^{s(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) dx = \frac{k}{\rho c} \int_0^{s(t)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) dx, \quad t > 0. \quad (1.38)$$

Este promedio o “balance integral calórico” es un balance energético que, suponiendo que  $s = s(t)$  es continuamente derivable y usando la regla de Leibnitz, puede expresarse como:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} T(x, t) dx = T(s(t), t) \dot{s}(t) + \frac{k}{\rho c} \left[ \frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) - \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \right], \quad t > 0, \quad (1.39)$$

y de las condiciones (1.3) y (1.4), se obtiene la siguiente condición integral:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} T(x, t) dx = \frac{-k}{\rho c} \left[ \frac{\rho \ell}{k} \dot{s}(t) + \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \right], \quad t > 0. \quad (1.40)$$

Por otro lado, si se deriva con respecto a  $t$  la condición (1.3), se despeja  $\dot{s}(t)$  y se la reemplaza en la condición de Stefan (1.4) se obtiene la condición (1.7), a través de la cual se mostró la no linealidad del problema de Stefan, es decir:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 (s(t), t) = \frac{\ell}{c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} (s(t), t), \quad t > 0. \quad (1.41)$$

Así, el *método de balance integral clásico* introducido en [96] para resolver el problema (1.1)-(1.5) con  $T_f = 0$ , propone la resolución de un problema que resulta de reemplazar la ecuación (1.1) por la condición integral (1.40), y la condición de Stefan (1.4) por la condición (1.41), manteniendo las demás condiciones del problema (1.1)-(1.5), iguales. Esto es, hallar la temperatura  $\tilde{T} = \tilde{T}(x, t)$  en la región líquida  $0 < x < \tilde{s}(t)$  y la frontera libre  $x = \tilde{s}(t)$ ,  $t \geq 0$  tal que

$$\frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} T(x, t) dx = \frac{-k}{\rho c} \left[ \frac{\rho \ell}{k} \dot{s}(t) + \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \right], \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (1.42)$$

$$T(0, t) = T_0 > 0, \quad t > 0, \quad (1.43)$$

$$T(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.44)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 (s(t), t) = \frac{\ell}{c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} (s(t), t), \quad t > 0, \quad (1.45)$$

$$s(0) = 0. \quad (1.46)$$

Para resolver el problema (1.42)-(1.46) se propone un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial definido por:

$$\tilde{T}(x, t) = \tilde{A}T_0 \left( 1 - \frac{x}{\tilde{s}(t)} \right) + \tilde{B}T_0 \left( 1 - \frac{x}{\tilde{s}(t)} \right)^2, \quad 0 \leq x \leq \tilde{s}(t), \quad t > 0, \quad (1.47)$$

y del hecho de conocer la solución exacta de la temperatura del problema de Stefan (1.1)-(1.5), es matemáticamente razonable asumir que la temperatura aproximada  $\tilde{T} = \tilde{T}(x, t)$  dada por (1.47) se comporte de manera similar a la exacta  $T = T(x, t)$  dada por (1.16) con  $T_f = 0$ ; es decir: su signo, monotonía y convexidad en el espacio (1.8) y (1.10).

Así, se asumen las siguientes condiciones sobre  $\tilde{T}$ :

$$0 < \tilde{T}(x, t) < T_0 \quad 0 < x < \tilde{s}(t), \quad t > 0, \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}(x, t) = \frac{-T_0}{\tilde{s}(t)} \left( \tilde{A} + 2\tilde{B} \left( 1 - \frac{x}{\tilde{s}(t)} \right) \right) < 0, \quad 0 < x < \tilde{s}(t), \quad t > 0, \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2}(x, t) = \frac{2\tilde{B}T_0}{\tilde{s}^2(t)} > 0, \quad 0 < x < \tilde{s}(t), \quad t > 0, \quad (1.50)$$

de lo que resulta que las constantes adimensionales  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  deben ser positivas.

De acuerdo al perfil adoptado (1.47) y en virtud de (1.42) se tiene la igualdad:

$$\dot{\tilde{s}}(t)T_0 \left( \frac{\tilde{A}}{2} + \frac{\tilde{B}}{3} \right) = -\frac{\ell}{c} \dot{\tilde{s}}(t) + \frac{(\tilde{A} + 2\tilde{B})a^2T_0}{\tilde{s}(t)},$$

de donde se obtiene que  $\tilde{s}(t)\dot{\tilde{s}}(t) = \text{const.} > 0$  y de (1.46), existe  $\tilde{\xi} > 0$  tal que

$$\tilde{s}(t) = 2a\tilde{\xi}\sqrt{t}, \quad t \geq 0, \quad (1.51)$$

teniendo la frontera libre del problema aproximado (1.42)-(1.46), la misma forma del problema exacto (1.1)-(1.5).

A pesar de que el método de balance integral puede no ser siempre tan preciso como otras técnicas de aproximación de solución como métodos numéricos, soluciones de perturbación, etc., sigue siendo una opción popular debido a su simplicidad y al hecho de que produce soluciones analíticas para una amplia gama de problemas y valores de parámetros. Es por ello que desde hace varias décadas, se vienen publicando artículos que han utilizado este método de aproximación y han ido surgiendo variantes del mismo aplicados a una gran variedad de problemas térmicos y de frontera libre, asumiendo distintos perfiles de temperatura (polinomios cúbicos, exponenciales, etc.) [21, 24, 27, 90, 102, 103, 108, 109, 131, 133–140, 164, 181, 197].

Un problema principal reciente que surge de la aplicación del método de balance integral se ha extendido al área de la conducción de calor no lineal [86, 104–107].

En esta Tesis se implementan el método de balance integral clásico [96] y dos variantes del mismo: el método de balance integral modificado y el método de balance integral refinado [164, 197], asumiendo un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial del tipo (1.47), para hallar soluciones aproximadas a problemas de Stefan unidimensionales a una fase.

## Métodos de balance integral modificado y refinado

En 2001, A. Wood en [197] introduce una variante del método de balance integral que consiste en resolver el problema que resulta de reemplazar la ecuación (1.1) por la condición

(1.40), manteniendo las demás condiciones del problema (1.1)-(1.5) iguales con  $T_f = 0$ . Este problema, denominado *método de balance integral modificado* consiste entonces en resolver el problema definido por las condiciones: (1.2)-(1.5) y (1.40), proponiendo un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial dado por (1.47) y la frontera libre está dada por (1.51).

En 2006, otra variante del método de balance integral calórico es introducida por N. Sadoun, E. Si-Ahmed y J. Colinet en [164]. Si se integra la ecuación (1.1) respecto de  $\xi$  entre 0 y  $x$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t}(\xi, t) d\xi &= \frac{k}{\rho c} \int_0^x \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}(\xi, t) d\xi \\ &= \frac{k}{\rho c} \left( \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \right), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1.52)$$

y si se integra esta última expresión con respecto a  $x$  entre 0 y  $s(t)$ , teniendo en cuenta la condición (1.3) con  $T_f = 0$ , se obtiene:

$$\int_0^{s(t)} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t}(\xi, t) d\xi dx = -\frac{k}{\rho c} \left( T(0, t) + s(t) \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \right), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0. \quad (1.53)$$

Esta variante del método de balance integral para resolver el problema (1.1)-(1.5), propone la resolución del problema aproximado que resulta de reemplazar la ecuación (1.1) por la condición (1.53), manteniendo todas las demás condiciones del problema (1.1)-(1.5), iguales. Esta técnica, denominada *método de balance integral refinado*, consiste entonces en resolver el problema definido por las condiciones: (1.2)-(1.5) y (1.53), proponiendo un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial dado por (1.47).

Análogamente al método de balance integral clásico, de acuerdo al perfil adoptado (1.47), se tiene:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}(x, t) = \frac{\dot{\tilde{s}}(t)}{\tilde{s}^2(t)} T_0 \left( (\tilde{A} + 2\tilde{B})x - \frac{2\tilde{B}}{\tilde{s}(t)} x^2 \right),$$

y en virtud de (1.53) se obtiene que  $\tilde{s}(t)\dot{\tilde{s}}(t) = const. > 0$ . Por lo tanto, usando (1.5), la frontera libre del problema aproximado que resulta de aplicar el método de balance integral refinado definido por (1.2)-(1.5) y (1.53) es como en (1.51), es decir, de la misma forma que la del problema exacto (1.1)-(1.5).

## Breve resumen de los capítulos

En esta Tesis se generalizan matemáticamente algunos de los resultados obtenidos en la bibliografía existente, hallando soluciones exactas de tipo similaridad de problemas de Stefan unidimensionales a una fase y a dos fases donde se consideran la conductividad térmica y el calor específico variables y dependientes de la temperatura. Se estudia, además, la existencia y unicidad de soluciones exactas de casos particulares de los problemas recién mencionados que resultan de resolver problemas aproximados definidos al aplicar métodos de balance integral a dichos problemas de Stefan.

Esta Tesis está organizada en cinco capítulos, siendo el primero esta Introducción. A continuación se presenta un breve resumen de los capítulos restantes.

## Capítulo 2: Soluciones exactas de problemas de Stefan a una fase con coeficientes térmicos variables

En este capítulo se consideran problemas de Stefan unidimensionales a una fase para un material semi-infinito  $x > 0$  con conductividad térmica y/o calor específico variables y dependientes de la temperatura. Este capítulo está dividido en dos partes:

### Parte I. Problemas de Stefan a una fase con conductividad térmica y calor específico dependientes de la temperatura

Motivado por [123], se prueba existencia y unicidad de solución de tipo similaridad para los problemas de fusión:

† Con condición de tipo Dirichlet en el borde fijo  $x = 0$ :

$$\rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (1.54)$$

$$T(0, t) = T_0 > T_f, \quad t > 0, \quad (1.55)$$

$$T(s(t), t) = T_f, \quad t > 0, \quad (1.56)$$

$$k_0 \frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) = -\rho \ell \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (1.57)$$

$$s(0) = 0. \quad (1.58)$$

† Con condición de tipo Neumann ( $\varepsilon = 0$ ) y de tipo Robin ( $\varepsilon = 1$ ) en el borde fijo  $x = 0$ :

$$\rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (1.59)$$

$$k(T(0, t)) \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{h}{\sqrt{t}} (\varepsilon T(0, t) - T_0), \quad t > 0, \quad (1.60)$$

$$T(s(t), t) = T_f, \quad t > 0, \quad (1.61)$$

$$k_0 \frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) = -\rho \ell \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (1.62)$$

$$s(0) = 0. \quad (1.63)$$

donde  $\rho > 0$  es la densidad de masa,  $\ell > 0$  es el calor latente,  $T_f$  es la temperatura de cambio de fase y  $T_0 > T_f$  representa la temperatura en el borde fijo  $x = 0$  en el problema (1.54)-(1.58) o la temperatura ambiente en el problema (1.59)-(1.63). La conductividad térmica y el calor específico se consideran variables y dependientes de la temperatura  $T = T(x, t)$  y están definidos por:

$$k(T) = k_0 \left( 1 + \delta \left( \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} \right)^p \right), \quad (1.64)$$

$$c(T) = c_0 \left( 1 + \delta \left( \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} \right)^p \right), \quad (1.65)$$



con  $\delta$  y  $p$  constantes no-negativas dadas,  $k_0 = k(T_f)$  y  $c_0 = c(T_f)$  la conductividad térmica y el calor específico de referencia, respectivamente.

Luego, se realiza un análisis del comportamiento asintótico cuando  $h \rightarrow +\infty$  donde se demuestra que la solución del problema (1.59)-(1.63) con la condición de tipo Robin ( $\varepsilon = 1$ ) en el borde fijo  $x = 0$  converge a la solución del problema (1.54)-(1.58) con la condición de tipo Dirichlet en el borde fijo  $x = 0$ . También se dan ejemplos computacionales donde se muestran los resultados teóricos deducidos previamente.

## Parte II. Problema de conducción de calor con conductividad térmica dependiente de la temperatura

A partir del problema de Stefan unidimensional a una fase para la solidificación de un material semi-infinito  $x > 0$  con conductividad térmica no lineal y dependiente de la temperatura y calor específico constante, en el que se impone una condición de tipo Robin en el borde fijo  $x = 0$ :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (1.66)$$

$$k(T(0, t)) \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{h}{\sqrt{t}} [T(0, t) - T_0], \quad t > 0, \quad (1.67)$$

$$T(s(t), t) = T_f, \quad t > 0, \quad (1.68)$$

$$k(T(s(t), t)) \frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) = \rho l \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (1.69)$$

$$s(0) = 0, \quad (1.70)$$

y motivado por [66, 73], se estudia la existencia y unicidad de solución del problema de conducción de calor definido por:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (1.71)$$

$$k(T(0, t)) \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{h}{\sqrt{t}} [T(0, t) - T_0], \quad t > 0, \quad (1.72)$$

$$T(+\infty, t) = T_f, \quad t > 0, \quad (1.73)$$

donde  $\rho > 0$  es la densidad de masa,  $c > 0$  es el calor específico,  $k = k(T)$  es la conductividad térmica y está dada (1.64) con  $p \geq 1$ ,  $T_0$  es la temperatura ambiente,  $T_f > T_0$  es la temperatura de cambio de fase y  $h > 0$  es el coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en  $x = 0$ .

La única solución del problema de conducción de calor (1.71)-(1.73), denominada función de error modificada  $p$ -generalizada, se obtiene utilizando un adecuado operador de contracción. Por último, se estudia el comportamiento asintótico demostrando que la solución del problema con condición de tipo Robin (1.71)-(1.73) converge a la solución del mismo problema pero imponiendo una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo  $x = 0$ ,  $T(0, t) = T_0$ , en lugar de la condición (1.72).

Los resultados obtenidos en este capítulo han sido publicados en [22] y [23]:

- J. Bollati, M. F. Natale, J. Semitiel y D. A. Tarzia. Existence and uniqueness of solution for two one-phase Stefan problems with variable thermal coefficients. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 51:103001, 2020.
- J. Bollati, M. F. Natale, J. Semitiel y D. A. Tarzia. Existence and uniqueness of the  $p$ -generalized modified error function. *Electronic Journal of Differential Equations*, 1-11, 2020.

Las referencias bibliográficas de este capítulo son: [2, 7, 21–24, 30, 34, 43, 46, 51, 64–66, 70, 72, 73, 79–81, 99, 115, 123, 130, 132, 142, 145, 146, 148, 152, 159, 160, 167, 174, 182, 184, 193, 201].

### Capítulo 3: Soluciones exactas de problemas de Stefan a una fase con coeficientes térmicos variables con fuentes de calor

En este capítulo se proporciona un estudio acerca de la existencia y unicidad de solución de tipo similaridad de un problema de Stefan unidimensional a una fase para la fusión de un material semi-infinito  $x > 0$  donde se asume una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo  $x = 0$  y se describe por una ecuación no clásica de calor y no lineal con conductividad térmica y calor específico dependientes de la temperatura y una fuente  $F$  de calor en el interior del material. El modelo matemático que describe el proceso de cambio de fase es el siguiente:

$$\rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - F, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (1.74)$$

$$T(0, t) = T_0 > T_f \quad t > 0, \quad (1.75)$$

$$T(s(t), t) = T_f, \quad t > 0, \quad (1.76)$$

$$k(T(s(t), t)) \frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) = -\rho l \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (1.77)$$

$$s(0) = 0, \quad (1.78)$$

donde la densidad de masa es  $\rho > 0$ , los coeficientes térmicos  $k = k(T)$  y  $c = c(T)$  están dados por (1.64) y (1.65), respectivamente,  $T_0$  es la temperatura impuesta en el borde fijo  $x = 0$ ,  $T_f < T_0$  es la temperatura de cambio de fase y el calor latente es  $\ell > 0$ .

Notar que el estudio de la existencia y unicidad del problema (1.74)-(1.78) sin término fuente,  $F \equiv 0$ , se desarrolla en el Capítulo 2 de esta Tesis.

El plan de este capítulo es el siguiente:

Primero, se prueba la existencia y unicidad de solución al problema (1.74)-(1.78) considerando la función de control  $F$  definida como en [51]:

$$F = F_1(x, t) = \frac{\rho \ell}{t} \beta \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (1.79)$$

donde  $\beta = \beta(\eta)$  en una función con propiedades de regularidad apropiadas [51, 172].

Luego, motivado por [172], se estudia un caso particular donde  $\beta$  es de tipo exponencial:

$$\beta(\eta) = \frac{1}{2} \exp(-\eta^2), \quad \eta > 0. \quad (1.80)$$

Finalmente, se demuestra existencia y unicidad de solución del problema (1.74)-(1.78) considerando la función de control  $F$  dependiendo de la evolución del flujo de calor en el borde fijo  $x = 0$  como en [47]:

$$F = F_2 \left( \frac{\partial T}{\partial x}(0, t), t \right) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{t}} \frac{\partial T}{\partial x}(0, t), \quad t > 0, \quad (1.81)$$

con  $\lambda_0 > 0$ . En este caso, se obtiene una ecuación de calor no clásica como en [186, 190].

Los resultados obtenidos en este capítulo han sido publicados en [25]:

- J. Bollati, M. F. Natale, J. Semitiel y D. A. Tarzia. Exact solution for non-classical one-phase Stefan problem with variable thermal coefficients and two different heat source term. *Computational and Applied Mathematics*, 41:375, 2022.

La bibliografía que se tuvo en cuenta para la redacción de este capítulo es la siguiente: [2, 13, 22, 25, 37–40, 47, 52, 55, 56, 63, 64, 66, 67, 69, 75, 88, 89, 93, 94, 99, 113, 114, 123, 132, 146, 152, 159–161, 172, 184, 186, 190].

## Capítulo 4: Soluciones exactas de problemas de Stefan a dos fases en un dominio angular con coeficientes térmicos variables

En este capítulo, motivado por [144, 196, 199], se considera un problema de frontera libre unidimensional a dos fases para la solidificación de un material semi-infinito  $x > 0$  en un dominio angular donde la conductividad térmica y el calor específico son dependientes de la temperatura.

En el momento inicial, la temperatura en el borde fijo  $x = 0$ , desciende hasta el punto de congelación y da comienzo a la solidificación del material. A medida que el líquido se solidifica, se encoge y aparece un dominio angular, es decir, una región vacía entre  $x = 0$  y  $x = rs(t)$  donde  $x = s(t)$  es la posición de la interfase y

$$r = 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \in (0, 1), \quad (1.82)$$

siendo  $\rho_i > 0$  la densidad de la región  $i$  donde  $i = 1$  es la región sólida,  $i = 2$  es la región líquida.

Esto lleva al siguiente problema de Stefan con una condición de tipo Dirichlet en el borde  $x = rs(t)$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) = \rho_1 c_1(T_1) \left( \frac{\partial T_1}{\partial t} + r \dot{s}(t) \frac{\partial T_1}{\partial x} \right), \quad rs(t) < x < s(t), \quad t > 0, \quad (1.83)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) = \rho_2 c_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial t}, \quad x > s(t), \quad t > 0, \quad (1.84)$$

$$T_2(+\infty, t) = T_2(x, 0) = B > T_f, \quad x > s(t), \quad (1.85)$$

$$T_1(s(t), t) = T_2(s(t), t) = T_f, \quad t > 0, \quad (1.86)$$

$$k_1(T_1(s(t), t)) \frac{\partial T_1}{\partial x}(s(t), t) - k_2(T_2(s(t), t)) \frac{\partial T_2}{\partial x}(s(t), t) = \rho_1 \ell \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (1.87)$$

$$s(0) = 0, \quad (1.88)$$

$$T_1(rs(t), t) = A < T_f, \quad t > 0, \quad (1.89)$$

donde la temperatura del sólido y del líquido es  $T_i = T_i(x, t)$  para  $i = 1, 2$ , respectivamente,  $T_f$  es la temperatura de congelación con  $A < T_f < B$ ,  $\ell > 0$  es el calor latente de fusión por unidad de masa, los coeficientes térmicos se consideran variables y están dados por:

$$k_i(T_i) = k_i^* \left[ 1 + \beta_i \left( \frac{T_i - B}{T_f - B} \right)^{p_i} \right], \quad (1.90)$$

$$c_i(T_i) = c_i^* \left[ 1 + \beta_i \left( \frac{T_i - B}{T_f - B} \right)^{p_i} \right], \quad (1.91)$$

para  $i = 1, 2$ , con  $\beta_i \geq 0$  y  $p_i \geq 0$ , donde  $k_i^* = k_i(T^*)$  y  $c_i^* = c_i(T^*)$  son la conductividad térmica de referencia y el calor específico de referencia, respectivamente, y la difusividad térmica del sólido y el líquido, respectivamente, están dadas por  $\alpha_i = \frac{k_i^*}{\rho_i c_i^*}$  para  $i = 1, 2$ .

Este capítulo está organizado en tres partes:

En la primera parte, se demuestra existencia y unicidad de solución de tipo similaridad del problema de frontera libre a dos fases (proceso de solidificación) en un dominio angular definido por (1.83)-(1.89).

En la segunda parte, se considera el mismo problema pero con una condición de tipo Neumann en el borde  $x = rs(t)$ . Más precisamente, se prueba existencia y unicidad de solución de tipo similaridad del problema de frontera libre a dos fases en un dominio angular que está definido por las ecuaciones (1.83) y (1.84), las condiciones (1.85)-(1.88) y la condición:

$$k_1(T_1(rs(t), t)) \frac{\partial T_1}{\partial x}(rs(t), t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}}, \quad q_0 > 0, \quad t > 0, \quad (1.92)$$

en lugar de la condición (1.89) del problema (1.83)-(1.89).

Por último, en la tercera parte, y motivado por [16, 68, 188], se impone la sobrecondición de tipo flujo en el borde  $x = rs(t)$  dada por (1.92), al problema (1.83)-(1.89) con condición de tipo Dirichlet en  $x = rs(t)$ , con el objetivo de determinar simultáneamente la temperatura  $T_i = T_i(x, t)$ , con  $i = 1, 2$ , la frontera libre  $x = s(t)$  y uno de los coeficientes térmicos desconocidos elegidos entre  $\{\rho_1, \rho_2, c_1^*, c_2^*, k_1^*, k_2^*, \ell\}$ .

Los resultados de este capítulo han sido aceptados para su publicación [26]:

- J. Bollati, M. F. Natale, J. Semitiel y D. A. Tarzia. Determination of one unknown coefficient in a two-phase free boundary problem in an angular domain. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 531:127775, 2024.

Para la escritura de este capítulo se tuvo en cuenta la siguiente bibliografía: [2, 4, 5, 14, 16, 25, 26, 28, 45, 66, 68, 73, 75, 95, 98, 118, 123, 125, 144, 152, 162, 163, 166, 179, 180, 183, 188, 192, 196, 198–200].

## Capítulo 5: Soluciones aproximadas de problemas de Stefan a una fase mediante métodos de balance integral

En este capítulo, se obtienen soluciones analíticas aproximadas de problemas de Stefan unidimensionales a una fase para la fusión de un material semi-infinito  $x > 0$ . La técnica utilizada para hallar tales aproximaciones es el método de balance integral clásico [96] y dos variantes del mismo: el método de balance integral modificado y el método de balance

integral refinado [164, 197]. Para cada una de estas aproximaciones, se propone un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial dado por (1.47).

Este capítulo está dividido en cuatro partes:

### Parte I. Soluciones aproximadas de un problema de Stefan a una fase con condición convectiva en el borde fijo

Se estudia el problema de Stefan unidimensional a una fase (P) para la fusión de un material semi-infinito  $x > 0$  en el cual los coeficientes térmicos son constantes y en el que se impone una condición convectiva o de tipo Robin en el borde fijo  $x = 0$ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (1.93)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{h}{\sqrt{t}} (T(0, t) - T_0), \quad t > 0, \quad (1.94)$$

$$T(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.95)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) = -\rho \ell \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (1.96)$$

$$s(0) = 0, \quad (1.97)$$

donde la conductividad térmica  $k$ , la densidad de masa  $\rho$ , el calor específico  $c$  y el calor latente  $\ell$  son constantes positivas,  $T_0 > 0$  es la temperatura ambiente y  $h > 0$  es el coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo  $x = 0$ .

Notar que el problema (1.93)-(1.97) es un caso particular del problema (1.59)-(1.63) con  $\varepsilon = 1$ ,  $T_f = 0$ ,  $k(T) = k_0 = k$  y  $c(T) = c_0 = c$  constantes positivas considerado en el Capítulo 2 de esta Tesis.

Para el problema (P), se obtienen soluciones analíticas de los siguientes problemas aproximados que surgen de aplicar los métodos: de balance integral clásico, de balance integral modificado y de balance integral refinado, proponiendo un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial dado por (1.47):

† Problema (P<sub>1</sub>): aplicando el método de balance integral clásico queda definido por (1.40), (1.41), (1.94), (1.95) y (1.97).

† Problema (P<sub>2</sub>): aplicando el método de balance integral modificado queda definido por (1.40), (1.94)-(1.97).

† Problema (P<sub>3</sub>): aplicando el método de balance integral refinado queda definido por (1.53), (1.94)-(1.97).

También, se estudia el comportamiento asintótico de las soluciones de los problemas aproximados (P<sub>*i*</sub>) con  $i = 1, 2, 3$  cuando  $h \rightarrow +\infty$ , recuperando las soluciones exactas de los problemas aproximados (P<sub>*i*∞</sub>) con  $i = 1, 2, 3$  que se definen de igual manera que los problemas (P<sub>*i*</sub>) pero imponiendo una condición de temperatura  $T_0 > 0$  en el borde fijo  $x = 0$ , en lugar de la condición convectiva (1.94).

Por último, y teniendo en cuenta el hecho de conocer la temperatura exacta y la posición de la frontera libre de los problemas (P) y (P<sub>∞</sub>) (este último se define de igual

manera que el problema (P) pero imponiendo una condición de temperatura  $T_0 > 0$  en el borde fijo  $x = 0$ , en lugar de la condición convectiva (1.94) en  $x = 0$ ) obtenida en [185], se comparan las soluciones exactas de los problemas (P) y  $(P_\infty)$  con las soluciones de los problemas aproximados  $(P_i)$  y  $(P_{i\infty})$ , con  $i = 1, 2, 3$ , analizando el error cometido en cada caso.

## Parte II. Soluciones aproximadas de un problema de Stefan a una fase para una ecuación no clásica del calor con fuente y una condición de temperatura en el borde fijo

Se estudia el problema de Stefan unidimensional a una fase  $(P_F)$  para la fusión de un material semi-infinito  $x > 0$  para una ecuación no clásica del calor con una fuente externa  $F$  que depende de la evolución del flujo de calor en el borde fijo  $x = 0$ , es decir:

$$F \left( \frac{\partial T}{\partial x}(0, t), t \right) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{t}} \frac{\partial T}{\partial x}(0, t), \quad t > 0, \quad (1.98)$$

con  $\lambda_0 > 0$  una constante dada, y donde se impone una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo  $x = 0$ :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\gamma F \left( \frac{\partial T}{\partial x}(0, t), t \right), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (1.99)$$

$$T(0, t) = T_0 > 0, \quad t > 0, \quad (1.100)$$

$$T(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.101)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) = -\rho \ell \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (1.102)$$

$$s(0) = 0, \quad (1.103)$$

donde la densidad de masa  $\rho > 0$ , el calor específico  $c > 0$ , la conductividad térmica  $k > 0$ ,  $\gamma > 0$ , la temperatura  $T_0 > 0$  en el borde fijo  $x = 0$  y el calor latente  $\ell > 0$  son constantes.

El problema  $(P_F)$  fue estudiado en [56] y puede observarse que es un caso particular del problema (1.74)-(1.78) con  $T_f = 0$ ,  $k(T) = k_0 = k$  y  $c(T) = c_0 = c$  constantes positivas considerado en el Capítulo 3 de esta Tesis.

Para este problema se obtienen únicas soluciones analíticas de los problemas aproximados que surgen de aplicar el método de balance integral clásico y dos variantes del mismo, proponiendo un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial (1.47):

† Problema  $(P_{F_1})$ : aplicando el método de balance integral clásico, queda definido por (1.100), (1.101), (1.103), por la condición

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 (s(t), t) = \frac{\ell}{kc} \left( k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(s(t), t) - \gamma \frac{\lambda_0}{\sqrt{t}} \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \right), \quad (1.104)$$

y por la condición integral:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} T(x, t) dx = -\frac{\frac{\partial T}{\partial x}(0, t)}{\rho c} \left[ \gamma \lambda_0 \frac{s(t)}{\sqrt{t}} + k \right] - \frac{\ell}{c} \dot{s}(t). \quad (1.105)$$

† Problema ( $P_{F_2}$ ): aplicando el método de balance integral modificado queda definido por (1.100)-(1.103) y (1.105).

† Problema ( $P_{F_3}$ ): aplicando el método de balance integral refinado queda definido por (1.100)-(1.103) y por la condición integral:

$$\int_0^{s(t)} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t}(\xi, t) d\xi dx = \frac{-1}{\rho c} \left[ \gamma \lambda_0 \frac{s^2(t)}{2\sqrt{t}} \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) + kT(0, t) + k \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) s(t) \right]. \quad (1.106)$$

Por último, y teniendo en cuenta el hecho de conocer la temperatura exacta y la posición de la frontera libre del problema ( $P_F$ ), se comparan entre sí las soluciones analíticas de los problemas aproximados ( $P_{F_i}$ ) con  $i = 1, 2, 3$ , con la solución exacta del problema ( $P_F$ ), analizando el error cometido en cada caso.

### Parte III. Soluciones aproximadas de un problema de Stefan a una fase para una ecuación no clásica del calor con fuente y una condición convectiva en el borde fijo

En este apartado, se obtiene la solución exacta del problema de Stefan unidimensional a una fase ( $P_{Fh}$ ) para la fusión de un material semi-infinito  $x > 0$  gobernado por una ecuación no clásica del calor (1.99) con  $F$  dada por (1.98), que satisface las condiciones (1.101)-(1.103) y en el cual se impone una condición de tipo Robin en el borde fijo  $x = 0$  dada por:

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{h}{\sqrt{t}} (T(0, t) - T_0), \quad t > 0. \quad (1.107)$$

También, se obtienen únicas soluciones analíticas de los problemas aproximados que surgen de aplicar los métodos: de balance integral clásico, balance integral modificado y de balance integral refinado, al problema de Stefan a una fase ( $P_{Fh}$ ) proponiendo un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial (1.47):

† Problema ( $P_{F_1h}$ ): aplicando el método de balance integral clásico queda definido por (1.101), (1.103), (1.104), (1.105) y (1.107).

† Problema ( $P_{F_2h}$ ): aplicando el método de balance integral modificado queda definido por (1.101)-(1.103), (1.105) y (1.107).

† Problema ( $P_{F_3h}$ ): aplicando el método de balance integral refinado queda definido por (1.101)-(1.103), (1.106) y (1.107).

Además, se estudia el comportamiento asintótico de las soluciones de los problemas ( $P_{Fh}$ ) y ( $P_{F_ih}$ ) con  $i = 1, 2, 3$  cuando  $h \rightarrow +\infty$ , recuperando las soluciones exactas de los problemas ( $P_F$ ) y ( $P_{F_i}$ ), con  $i = 1, 2, 3$  estudiados en la Parte II de este Capítulo.

Por último, y teniendo en cuenta el hecho de conocer la solución exacta del problema de frontera libre ( $P_{Fh}$ ), se comparan entre sí las soluciones analíticas de los problemas aproximados ( $P_{F_ih}$ ) con  $i = 1, 2, 3$ , con la solución exacta del problema ( $P_{Fh}$ ), analizando el error cometido en cada caso.

**Parte IV. Soluciones aproximadas de un problema de Stefan a una fase con conductividad térmica no lineal dependiente de la temperatura y una condición de temperatura en el borde fijo**

En esta última parte del Capítulo 5, se considera un problema de Stefan unidimensional a una fase ( $P_k$ ) para la fusión de un material semi-infinito  $x > 0$  con conductividad térmica variable y dependiente de la temperatura  $T$  definida como en [147]:

$$k(T) = \frac{\rho c}{(\beta + \delta T)}, \quad (1.108)$$

donde  $\beta, \delta$  son parámetros positivos y las constantes  $\rho > 0$  es la densidad de masa y  $c > 0$  es el calor específico, el cual puede formularse matemáticamente de la siguiente manera:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (1.109)$$

$$T(0, t) = T_0 > 0, \quad t > 0, \quad (1.110)$$

$$T(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.111)$$

$$k(T(s(t), t)) \frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) = -\rho \ell \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (1.112)$$

$$s(0) = 0, \quad (1.113)$$

donde  $T_0 > 0$  es la temperatura en el borde fijo  $x = 0$ .

Para este problema se obtiene existencia y unicidad de solución de los problemas aproximados que surgen de aplicar los métodos: de balance integral clásico, de balance integral modificado y de balance integral refinado, proponiendo un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial (1.47):

† Problema ( $P_{k_1}$ ): aplicando el método de balance integral clásico, queda definido por (1.110), (1.111), (1.113), por la condición

$$k(T) \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 = \frac{\ell}{c} \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad \text{en} \quad x = s(t), \quad t > 0, \quad (1.114)$$

y por la condición integral:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} T(x, t) dx = \frac{-1}{\rho c} \left[ \rho \ell \dot{s}(t) + k(T_0) \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \right]. \quad (1.115)$$

† Problema ( $P_{k_2}$ ): aplicando el método de balance integral modificado queda definido por (1.110)-(1.113) y (1.115).

† Problema ( $P_{k_3}$ ): aplicando el método de balance integral refinado queda definido por (1.110)-(1.113), y por la condición integral:

$$\int_0^{s(t)} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t}(\eta, t) d\eta dx = -\frac{T_0 (1 + \text{Ste}) + s(t) \frac{\partial T}{\partial x}(0, t)}{\beta^2 (1 + \text{Ste})^2}. \quad (1.116)$$



Por último, y teniendo en cuenta el hecho de conocer la temperatura exacta y la posición de la frontera libre del problema  $(P_k)$  dada en [147], se comparan entre sí las soluciones analíticas de los problemas aproximados  $(P_{k_i})$  con  $i = 1, 2, 3$ , con la solución exacta del problema  $(P_k)$ , analizando el error cometido en cada caso.

Los resultados obtenidos en este capítulo se han publicado en [21], [24] y [27]:

- J. Bollati, J. Semitiel y D. A. Tarzia. Heat balance integral methods applied to the one-phase Stefan problem with a convective boundary condition at the fixed face. *Applied Mathematics and Computation*, 331:1-19, 2018.
- J. Bollati, M. F. Natale, J. Semitiel y D. A. Tarzia. Integral balance methods applied to non-classical Stefan problems. *Thermal Science*, 24:1229-1241, 2020.
- J. Bollati, M. F. Natale, J. Semitiel y D. A. Tarzia. *Approximate solutions to the one-phase Stefan problem with temperature-dependent thermal conductivity*, Chapter 1, In Heat Conduction: Methods, Applications and Research, pages 1-20. J. Hristov - R. Bennacer (Eds.), Nova Science Publishers, Inc., 2019.

Las referencias bibliográficas de este capítulo son: [2, 10, 15, 21, 24, 27, 56, 58, 59, 62, 63, 86, 87, 96, 98, 102–106, 117, 130, 131, 133, 134, 136–141, 147, 157–159, 164, 169, 174, 181, 183–185, 187, 197, 202].

## Capítulo 2

# Soluciones exactas de problemas de Stefan a una fase con coeficientes térmicos variables

En este capítulo se consideran problemas de Stefan unidimensionales a una fase para un material semi-infinito  $x > 0$  con coeficientes térmicos variables dependientes de la temperatura. Está organizado en dos secciones:

En la primera sección, se estudian problemas de Stefan para la fusión de un material semi-infinito con conductividad térmica y calor específico dependientes de la temperatura donde se prueban la existencia y unicidad de solución de los mismos imponiendo una condición de tipo Dirichlet, una condición de tipo Neumann o una condición de tipo Robin en el borde fijo  $x = 0$ . Además, se estudia el comportamiento asintótico demostrando que la solución del problema de Stefan con condición de tipo Robin, converge a la solución del problema con condición de tipo Dirichlet en el borde fijo  $x = 0$ . También, se muestran algunos ejemplos computacionales de los resultados obtenidos.

En la segunda sección, se estudian problemas de conducción de calor que surgen de problemas de Stefan para la solidificación de un material semi-infinito  $x > 0$  con conductividad térmica dependiente de la temperatura en los que se impone una condición de tipo Dirichlet o una condición de tipo Robin en el borde fijo  $x = 0$ . Se prueba existencia y unicidad de solución de los problemas de conducción de calor mostrando la equivalencia de éstos con problemas diferenciales ordinarios utilizando un adecuado operador de contracción del cual se obtiene la llamada función de error modificada  $p$ -generalizada. Además, se estudia el comportamiento asintótico demostrando que la solución del problema con condición de tipo Robin converge a la solución del problema con condición de tipo Dirichlet en el borde fijo  $x = 0$ .

### 2.1. Problemas de Stefan a una fase con conductividad térmica y calor específico dependientes de la temperatura

Se consideran dos tipos de problemas de Stefan a una fase para la fusión de un material semi-infinito  $x > 0$  con conductividad térmica  $k(T)$  y calor específico  $c(T)$ , dependientes

de la temperatura  $T = T(x, t)$  dados de la siguiente manera:

$$k(T) = k_0 \left( 1 + \delta \left( \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} \right)^p \right), \quad (2.1)$$

$$c(T) = c_0 \left( 1 + \delta \left( \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} \right)^p \right), \quad (2.2)$$

donde  $\delta$  y  $p$  son constantes no-negativas dadas,  $k_0 = k(T_f)$  y  $c_0 = c(T_f)$  son la conductividad térmica y el calor específico de referencia, respectivamente y  $T_f < T_0$  es la temperatura de cambio de fase en la frontera libre desconocida  $x = s(t)$ .

En el primer problema, se asume una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo  $x = 0$ . El modelo matemático del proceso se describe a continuación:

$$\rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (2.3)$$

$$T(0, t) = T_0 > T_f, \quad t > 0, \quad (2.4)$$

$$T(s(t), t) = T_f, \quad t > 0, \quad (2.5)$$

$$k_0 \frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) = -\rho \ell \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (2.6)$$

$$s(0) = 0, \quad (2.7)$$

donde  $\rho > 0$  es la densidad,  $\ell > 0$  es el calor latente por unidad de masa y  $T_0$  es la temperatura impuesta en el borde fijo  $x = 0$ , son constantes dadas.

El problema (2.3)-(2.7) fue considerado previamente en [123] donde se obtuvieron soluciones aproximadas. En [51], se demostró existencia de una solución explícita de tipo similaridad mediante el uso de un teorema de punto fijo cuando los coeficientes térmicos son acotados y funciones lipschitzianas.

El segundo problema de Stefan que se considera está definido por la ecuación (2.3), las condiciones (2.5)-(2.7) y, en lugar de la condición de temperatura (2.4), se impone una condición generalizada en el borde fijo  $x = 0$  como en [30] y está dada por:

$$k(T(0, t)) \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{h}{\sqrt{t}} (\varepsilon T(0, t) - T_0), \quad t > 0, \quad (2.8)$$

con  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ , donde  $T_0 > T_f$  representa la temperatura ambiente.

Si se toma  $\varepsilon = 0$ , es posible reescribir (2.8) como una condición de tipo Neumann:

$$k(T(0, t)) \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = -\frac{q}{\sqrt{t}}, \quad t > 0, \quad (2.9)$$

donde  $q = hT_0$  es el coeficiente que caracteriza el flujo de calor en el borde fijo  $x = 0$ .

Para el caso especial  $\varepsilon = 1$ , la condición (2.8) representa una condición de tipo Robin dada por:

$$k(T(0, t)) \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{h}{\sqrt{t}} (T(0, t) - T_0), \quad t > 0, \quad (2.10)$$

donde  $h > 0$  es el coeficiente de transferencia térmica.

En las dos subsecciones que siguen, se prueba existencia y unicidad de los problemas de Stefan recién definidos.

### 2.1.1. Existencia y unicidad de solución del problema de Stefan con condición de tipo Dirichlet en el borde fijo

Se desea obtener una solución de tipo similaridad del problema (2.3)-(2.7), más precisamente, que la temperatura  $T = T(x, t)$  se pueda escribir como una función de una sola variable, mediante la transformación:

$$y(\eta) = \frac{T(x, t) - T_f}{T_0 - T_f}, \quad (2.11)$$

donde la variable de similaridad  $\eta$  está definida por:

$$\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}}, \quad (2.12)$$

la frontera libre está dada por:

$$s(t) = 2a\lambda\sqrt{t}, \quad t > 0, \quad (2.13)$$

donde  $a^2 = \frac{k_0}{\rho c_0}$  es una difusividad térmica de referencia y  $\lambda > 0$  es un parámetro a determinar.

Siguiendo el método clásico de Neumann, se propone entonces una solución de tipo similaridad  $(T, s)$  al problema de Stefan (2.3)-(2.7) dada por:

$$T(x, t) = (T_0 - T_f) y\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + T_f, \quad 0 \leq x \leq s(t), \quad t > 0, \quad (2.14)$$

$$s(t) = 2a\lambda\sqrt{t}, \quad t \geq 0. \quad (2.15)$$

Teniendo en cuenta que la variable de similaridad  $\eta$  está dada por (2.12), entonces

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = -\frac{1}{2t}(T_0 - T_f)\eta y'(\eta), \quad \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{t}}(T_0 - T_f)y'(\eta), \quad (2.16)$$

y reemplazando estas expresiones en la ecuación (2.3), se obtiene que la función  $y = y(\eta)$  debe satisfacer la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$2\eta(1 + \delta y^p(\eta))y'(\eta) + [(1 + \delta y^p(\eta))y'(\eta)]' = 0, \quad 0 < \eta < \lambda. \quad (2.17)$$

Además, la condición (2.4) implica que  $T(0, t) = (T_0 - T_f)y(0) + T_f = T_0$  resultando la siguiente condición:

$$y(0) = 1. \quad (2.18)$$

De manera similar, teniendo en cuenta que  $s$  está dada por (2.15), se obtiene de la condición (2.5),

$$T(s(t), t) = (T_0 - T_f)y(\lambda) + T_f = T_f,$$

y por lo tanto:

$$y(\lambda) = 0. \quad (2.19)$$

Por último, la condición de Stefan (2.6) es equivalente a

$$\frac{k_0}{2a\sqrt{t}}(T_0 - T_f)y'(\lambda) = -\rho\ell\frac{a\lambda}{\sqrt{t}},$$

y teniendo en cuenta la definición del parámetro  $a$ , se deduce que:

$$y'(\lambda) = -\frac{2\lambda}{\text{Ste}}, \quad (2.20)$$

donde  $\text{Ste} = \frac{c_0(T_0 - T_f)}{\ell} > 0$  es el número de Stefan.

Recíprocamente, si  $(y, \lambda)$  es una solución del problema (2.17)-(2.20), mediante el cambio de variable (2.11)-(2.12), de la condición (2.18) se obtiene (2.4), de la condición (2.19) se obtiene (2.5) y la frontera libre  $x = s(t)$  está dada por (2.15) verificándose (2.7). De (2.20) y teniendo en cuenta (2.16), se obtiene la condición de Stefan (2.6). Por último,  $T = T(x, t)$  está dada por (2.14) y teniendo en cuenta (2.16), satisface la ecuación (2.3). Por lo tanto,  $(T, s)$  dada por (2.14)-(2.15), verifica el problema (2.3)-(2.7).

Se ha demostrado entonces la siguiente equivalencia entre problemas:

**Teorema 2.1.** *Sean  $p \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $y \in C^2(0, \lambda)$  y  $y \geq 0$ . El problema de Stefan dado por (2.3)-(2.7) tiene una solución de tipo similaridad  $(T, s)$  dada por (2.14)-(2.15) si y solo si  $(y, \lambda)$  es una solución del problema diferencial ordinario definido por (2.17)-(2.20).*

En [123], se aproximó la solución del problema diferencial ordinario (2.17)-(2.20) usando polinomios de Chebyshev a través del método de Tau. También en dicho trabajo se encuentra la solución exacta para los casos particulares  $p = 1$  y  $p = 2$ . El objetivo de esta parte del capítulo es probar la existencia y unicidad de solución para cada  $\delta \geq 0$  y  $p \geq 0$ , es decir, se estudia la existencia y unicidad de solución al problema (2.3)-(2.7) a través del problema diferencial ordinario (2.17)-(2.20). Cabe destacar que el caso particular con  $\delta = 0$ , es decir con coeficientes térmicos constantes, y el caso lineal  $p = 1$ , se estudió en [73, 152, 167, 182].

**Lema 2.1.** *Sean  $p \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $y \in C^2(0, \lambda)$  y  $y \geq 0$ . Entonces  $(y, \lambda)$  es una solución del problema diferencial ordinario (2.17)-(2.20) si y solo si  $\lambda$  es una solución de la ecuación*

$$f(z) = g, \quad z > 0, \quad (2.21)$$

y la función  $y = y(\eta)$  verifica

$$F(y(\eta)) = G(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq \lambda, \quad (2.22)$$

donde

$$g = 1 + \frac{\delta}{p+1}, \quad f(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\text{Ste}} z \exp(z^2) \text{erf}(z), \quad z \geq 0, \quad (2.23)$$

$$F(z) = z + \frac{\delta}{p+1} z^{p+1}, \quad z \geq 0, \quad G(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\text{Ste}} \lambda \exp(\lambda^2) (\text{erf}(\lambda) - \text{erf}(z)), \quad 0 \leq z \leq \lambda. \quad (2.24)$$

*Demostración.* Sea  $(y, \lambda)$  una solución del problema (2.17)-(2.20).

Definiendo  $v(\eta) = (1 + \delta y^p(\eta)) y'(\eta)$ , la ecuación diferencial ordinaria (2.17) es equivalente a

$$v'(\eta) + 2\eta v(\eta) = 0,$$

y teniendo en cuenta las condiciones (2.19) y (2.20), resulta:

$$v(\eta) = -\frac{2\lambda}{\text{Ste}} \exp(\lambda^2) \exp(-\eta^2).$$

Por lo tanto:

$$y'(\eta) + \delta y^p(\eta) y'(\eta) = -\frac{2\lambda}{\text{Ste}} \exp(\lambda^2) \exp(-\eta^2). \quad (2.25)$$

Si se integra (2.25) entre 0 y  $\eta$ , y se tiene en cuenta la condición (2.18), se obtiene:

$$y(\eta) + \frac{\delta}{p+1} y^{p+1}(\eta) = 1 + \frac{\delta}{p+1} - \frac{\sqrt{\pi}}{\text{Ste}} \lambda \exp(\lambda^2) \text{erf}(\eta), \quad (2.26)$$

Al tomar  $\eta = \lambda$  en la ecuación anterior y teniendo en cuenta (2.19) se obtiene que  $\lambda > 0$  es solución de la ecuación (2.21). Además, como  $\lambda$  satisface (2.21):

$$1 + \frac{\delta}{p+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{\text{Ste}} \lambda \exp(\lambda^2) \text{erf}(\lambda),$$

la ecuación (2.26) puede escribirse como

$$y(\eta) + \frac{\delta}{p+1} y^{p+1}(\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{\text{Ste}} \lambda \exp(\lambda^2) (\text{erf}(\lambda) - \text{erf}(\eta)), \quad 0 \leq \eta \leq \lambda, \quad (2.27)$$

esto es (2.22).

Así,  $(y, \lambda)$  es una solución del problema funcional (2.21)-(2.24).

Recíprocamente, si  $(y, \lambda)$  es una solución del problema funcional (2.21)-(2.24), se tiene que:

$$y(\eta) = -\frac{\delta}{p+1} y^{p+1}(\eta) + \left(1 + \frac{\delta}{p+1}\right) \left(1 - \frac{\text{erf}(\eta)}{\text{erf}(\lambda)}\right), \quad 0 \leq \eta \leq \lambda. \quad (2.28)$$

Si se deriva la expresión anterior respecto de  $\eta$  se obtiene:

$$y'(\eta) = -\delta y^p(\eta) y'(\eta) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{\delta}{p+1}\right) \frac{\exp(-\eta^2)}{\text{erf}(\lambda)}, \quad (2.29)$$

y al derivar (2.29) respecto de  $\eta$  resulta:

$$[(1 + \delta y^p(\eta)) y'(\eta)]' = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{\delta}{p+1}\right) \eta \frac{\exp(-\eta^2)}{\text{erf}(\lambda)}.$$

Luego, teniendo en cuenta (2.29) en la expresión anterior se obtiene:

$$[(1 + \delta y^p(\eta)) y'(\eta)]' = -2\eta (1 + \delta y^p(\eta)) y'(\eta), \quad (2.30)$$

esto es, la ecuación (2.17).

De (2.28), tomando  $\eta = 0$  se obtiene:

$$y(0) + \frac{\delta}{p+1} y^{p+1}(0) = 1 + \frac{\delta}{p+1},$$

de la cual necesariamente  $y(0) = 1$ , es decir la condición (2.18), ya que en cualquier otro caso se llega a una contradicción.

Si en (2.28), se toma  $\eta = \lambda$  resulta:

$$y(\lambda) \left(1 + \frac{\delta}{p+1} y^p(\lambda)\right) = 0,$$

la cual se verifica solo si  $y(\lambda) = 0$ , esto es, la condición (2.19).

Por último, tomando  $\eta = \lambda$  en (2.29), teniendo en cuenta que  $y(\lambda) = 0$  y que  $\lambda$  satisface la ecuación (2.21), se tiene la condición (2.20).

Por lo tanto,  $(y, \lambda)$  es una solución al problema diferencial ordinario (2.17)-(2.20). ■

De acuerdo con el resultado anterior, se procede a demostrar que existe una única solución del problema funcional (2.21)-(2.24) y así es posible asegurar la existencia y unicidad de solución de tipo similaridad del problema de Stefan (2.3)-(2.7).

**Lema 2.2.** *Si  $p \geq 0$  y  $\delta \geq 0$ , entonces existe una única solución  $(y, \lambda)$  del problema funcional definido por (2.21)-(2.24) con  $\lambda > 0$ ,  $y \in C^2(0, \lambda)$  y  $y \geq 0$ .*

*Demostración.* En virtud de que la función  $f$  dada por (2.23) es creciente en  $[0, +\infty)$  tal que  $f(0) = 0$  y  $f(+\infty) = +\infty$  y además  $g = 1 + \frac{\delta}{p+1} > 0$ , entonces existe una única solución  $\lambda > 0$  de la ecuación (2.21).

Fijado  $\lambda > 0$ . Es fácil ver que  $F$  definida por (2.24) es una función creciente en  $[0, +\infty)$ , por lo que es posible definir  $F^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ . Como la función  $G$  definida por (2.24) es positiva para  $0 \leq \eta \leq \lambda$ , se tiene que existe una única solución  $y \in C^2(0, \lambda)$  de la ecuación (2.22) y está dada por

$$y(\eta) = F^{-1}(G(\eta)), \quad 0 \leq \eta \leq \lambda. \quad (2.31)$$

■

Del Teorema 2.1 y de los dos lemas anteriores es posible afirmar el siguiente resultado:

**Teorema 2.2.** *Sean  $p \geq 0$  y  $\delta \geq 0$ . El problema de Stefan definido por (2.3)-(2.7) tiene una única solución de tipo similaridad  $(T, s)$  dada por (2.14)-(2.15) siendo  $(y, \lambda)$  la única solución del problema funcional definido por (2.21)-(2.24) donde  $\lambda > 0$ ,  $y \in C^2(0, \lambda)$  y  $y \geq 0$ .*

**Observación 2.1.** *Por un lado, la función  $G$  dada por (2.24) es una función decreciente en  $[0, \lambda]$  con  $G(0) = 1 + \frac{\delta}{p+1}$  y  $G(\lambda) = 0$ . Por otro lado se tiene que la función  $F$  definida por (2.24) es una función creciente en  $[0, 1]$  con  $F(0) = 0$  y  $F(1) = 1 + \frac{\delta}{p+1}$ . Entonces, de (2.31), sigue que*

$$0 \leq y(\eta) \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq \lambda.$$

*En virtud de esto último y del Teorema 2.2 se tiene, como era de esperar, que:*

$$T_f \leq T(x, t) \leq T_0, \quad 0 \leq x \leq s(t), \quad t \geq 0.$$

**Observación 2.2.** Si  $T = T(x, t)$  es una solución del problema de frontera libre (2.3)-(2.7), al definir la transformación de Kirchhoff:

$$\theta(x, t) = \int_{T_f}^{T(x, t)} \left[ 1 + \delta \left( \frac{\xi - T_f}{T_0 - T_f} \right)^p \right] d\xi, \quad (2.32)$$

se obtiene para la nueva incógnita  $\theta = \theta(x, t)$  el problema de Stefan clásico a una fase con coeficientes térmicos constantes dado por

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (2.33)$$

$$\theta(0, t) = (T_0 - T_f) \left( 1 + \frac{\delta}{1+p} \right), \quad t > 0, \quad (2.34)$$

$$\theta(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.35)$$

$$k_0 \frac{\partial \theta}{\partial x}(s(t), t) = -\rho \ell \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (2.36)$$

$$s(0) = 0, \quad (2.37)$$

cuya solución, obtenida en [2], viene dada por:

$$\begin{cases} \theta(x, t) = (T_0 - T_f) \left( 1 + \frac{\delta}{p+1} \right) \left[ 1 - \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_0 t}}\right)}{\operatorname{erf}(\lambda)} \right], & 0 \leq x \leq s(t), \quad t > 0, \\ s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_0 t}, & t \geq 0, \end{cases}$$

donde  $\lambda > 0$  es la única solución de la ecuación:

$$z \operatorname{erf}(z) \exp(z^2) = \frac{\operatorname{Ste}}{\sqrt{\pi}} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right), \quad z > 0, \quad (2.38)$$

siendo  $\operatorname{Ste} = \frac{c_0(T_0 - T_f)}{\ell}$  el número de Stefan y  $\alpha_0 = \frac{k_0}{\rho c_0}$ .

Por el contrario, si  $\theta = \theta(x, t)$  es la solución del problema de frontera libre (2.33)-(2.37) entonces la temperatura  $T = T(x, t)$  definida implícitamente por (2.32) es equivalente a

$$\theta(x, t) = (T(x, t) - T_f) \left[ \left( 1 + \frac{\delta}{p+1} \left( \frac{T(x, t) - T_f}{T_0 - T_f} \right)^p \right) \right], \quad 0 \leq x \leq s(t), \quad t > 0, \quad (2.39)$$

y es una solución del problema (2.3)-(2.7). En cualquier caso, la solución exacta del problema de frontera libre (2.3)-(2.7) viene dada por las expresiones (2.14)-(2.15) como se demostró en el Teorema 2.2.

**Observación 2.3.** Para el caso particular  $p = 1$ ,  $\delta \geq 0$ , la solución del problema (2.21)-(2.24) está dada por:

$$y(\eta) = \frac{1}{\delta} \left[ \sqrt{(1 + \delta)^2 - \delta(2 + \delta) \frac{\operatorname{erf}(\eta)}{\operatorname{erf}(\lambda)}} - 1 \right], \quad 0 \leq \eta \leq \lambda, \quad (2.40)$$

donde  $\lambda > 0$  es la única solución de la ecuación:

$$z \exp(z^2) \operatorname{erf}(z) = \frac{\operatorname{Ste}}{\sqrt{\pi}} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right), \quad z \geq 0. \quad (2.41)$$

De hecho, si  $p = 1$ , la ecuación (2.22) resulta:

$$y^2(\eta) + \frac{2}{\delta} y(\eta) - \left( 1 + \frac{2}{\delta} \right) \left[ 1 - \frac{\operatorname{erf}(\eta)}{\operatorname{erf}(\lambda)} \right] = 0, \quad (2.42)$$

la cual tiene una única solución positiva dada por (2.40).

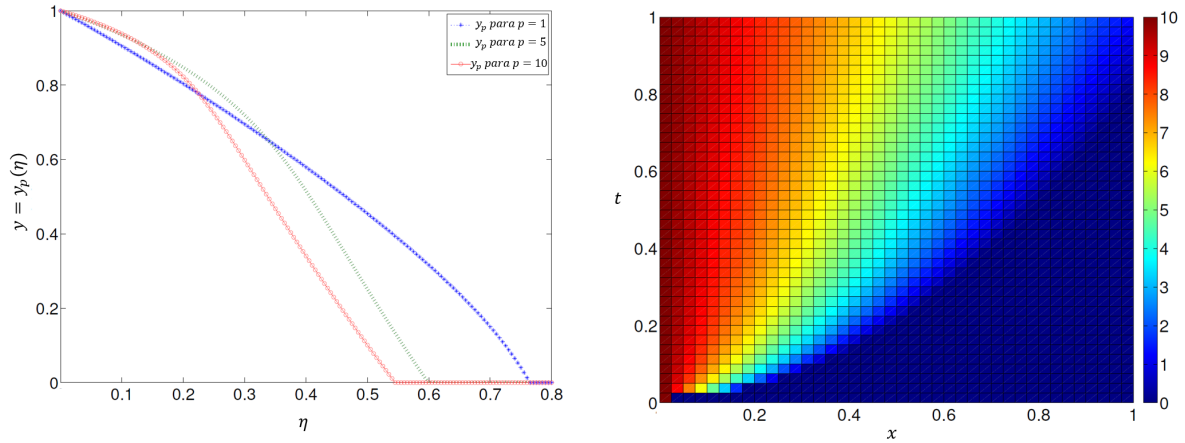


En vista de los Lemas 2.1 y 2.2, es posible calcular la solución  $(y, \lambda)$  del problema diferencial ordinario (2.17)-(2.20), mediante el uso de su formulación funcional.

En la Figura 2.1a, para diferentes valores de  $p$ , se representa gráficamente la solución  $(y_p, \lambda)$  del problema (2.21)-(2.24). Para comparar las diferentes soluciones  $y = y_p$ , se extienden por cero para cada  $\eta > \lambda$ . Asumiendo  $\delta = 5$  y  $\text{Ste} = 0.5$ . Debe señalarse que la elección de  $\text{Ste}$  se debe al hecho de que para la mayoría de los materiales en problemas de cambio de fase a una temperatura realista, el número de Stefan no superará el valor 1 (ver [174]).

Aunque se puede deducir analíticamente de la ecuación (2.21), se puede observar gráficamente que a medida que aumenta  $p$ , el valor de  $\lambda$  disminuye.

En vista del Teorema 2.1, también se puede graficar la solución  $(T, s)$  del problema (2.17)-(2.20). En la Figura 2.1b se presenta un mapa de colores para la temperatura  $T = T(x, t)$  extendiéndolo por cero para  $x > s(t)$ .



(a) Función  $y_p = y_p(\eta)$

(b) Mapa de colores para la temperatura  $T(x, t)$

Figura 2.1: (a) Gráfica de la función  $y_p = y_p(\eta)$  para diferentes valores de  $p = 1, 5, 10$ , fijados  $\delta = 5$  y  $\text{Ste} = 0.5$ . (b) Mapa de colores para la temperatura  $T = T(x, t)$  fijando  $\delta = 1$ ,  $p = 1$ ,  $\text{Ste} = 0.5$ ,  $T_f = 0$ ,  $T_0 = 10$  y  $a = 1$ .

### 2.1.2. Existencia y unicidad de solución de los problemas de Stefan con condiciones de tipo Neumann y de tipo Robin en el borde fijo

En esta subsección se considera el problema de Stefan definido por la ecuación (2.3), las condiciones (2.5)-(2.7) imponiendo una condición de frontera generalizada en el borde fijo  $x = 0$  dada por (2.8) que representa una condición de tipo Neumann o de tipo Robin para los casos  $\varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ , respectivamente. La condición convectiva es físicamente mas realista debido a que establece que el flujo entrante en el borde fijo es proporcional a la diferencia entre la temperatura en la superficie del material y la temperatura ambiente a imponer.

Como en la subsección anterior, se busca una solución de tipo similaridad para el problema de Stefan dado por (2.3), (2.5)-(2.8). Si se define la transformación (2.11) donde

la variable de similaridad  $\eta$  está dada por (2.12), la frontera libre está dada por:

$$s_\gamma(t) = 2a\lambda_\gamma\sqrt{t}, \quad t > 0, \quad (2.43)$$

donde  $a^2 = \frac{k_0}{\rho c_0}$  es la difusividad térmica y  $\lambda_\gamma$  es un parámetro positivo a determinar.

Se propone como en la subsección anterior, una solución de la forma:

$$T_\gamma(x, t) = (T_0 - T_f) y_\gamma \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) + T_f, \quad 0 \leq x \leq s_\gamma(t), \quad t > 0, \quad (2.44)$$

$$s_\gamma(t) = 2a\lambda_\gamma\sqrt{t}, \quad t \geq 0. \quad (2.45)$$

y, de manera análoga al Teorema 2.1, se tiene la equivalencia entre el problema de Stefan con un problema diferencial ordinario:

**Teorema 2.3.** Sean  $p \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$ ,  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ ,  $\lambda_\gamma > 0$ ,  $y_\gamma \in C^2(0, \lambda_\gamma)$  y  $y_\gamma \geq 0$ . El problema de Stefan dado por (2.3), (2.5)-(2.8) tiene una solución de tipo similaridad  $(T_\gamma, s_\gamma)$  dada por (2.44)-(2.45) si y solo si  $(y_\gamma, \lambda_\gamma)$  satisface el problema diferencial ordinario definido por la ecuación diferencial ordinaria (2.17), las condiciones (2.19)-(2.20) y la condición:

$$(1 + \delta y^p(0)) y'(0) = \gamma (\varepsilon y(0) - 1), \quad (2.46)$$

donde

$$\gamma = 2\text{Bi} \quad y \quad \text{Bi} = \frac{ha}{k_0}, \quad (2.47)$$

siendo  $\text{Bi} > 0$  el número de Biot generalizado.

**Observación 2.4.** El número de Biot, en honor al físico francés J. B. Biot (1774-1862), se define como una constante adimensional que relaciona la transferencia de calor por conducción dentro de un cuerpo y la transferencia de calor por convección en la superficie de dicho cuerpo.

**Observación 2.5.** Se adopta la notación  $\lambda_\gamma$  y  $y_\gamma$  para enfatizar la dependencia de la solución del problema (2.17), (2.19)-(2.20) y (2.46) de  $\gamma$ , aunque también depende de  $p$  y  $\delta$ . Este hecho va a facilitar el posterior análisis del comportamiento asintótico de  $y_\gamma$  cuando  $\gamma \rightarrow +\infty$  ( $h \rightarrow +\infty$ ) que se presenta en la siguiente subsección.

De manera similar a los resultados obtenidos en el apartado anterior, es posible establecer las siguientes afirmaciones:

**Lema 2.3.** Sean  $p \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ ,  $\lambda_\gamma > 0$ ,  $y_\gamma \in C^2(0, \lambda_\gamma)$  y  $y_\gamma \geq 0$ . Entonces  $(y_\gamma, \lambda_\gamma)$  es una solución al problema diferencial ordinario definido por (2.17), (2.19), (2.20) y (2.46) si y solo si  $\lambda_\gamma$  es una solución de la siguiente ecuación:

$$F_\varepsilon(\beta_\gamma(z)) = f_\varepsilon(z), \quad z > 0, \quad (2.48)$$

y  $y_\gamma = y_\gamma(\eta)$  verifica

$$F(y_\gamma(\eta)) = G_\gamma(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq \lambda_\gamma, \quad (2.49)$$

donde  $F$  está dada por (2.24) y

$$F_\varepsilon(z) = \varepsilon^p z + \frac{\delta}{p+1} z^{p+1}, \quad z \geq 0, \quad (2.50)$$

$$f_\varepsilon(z) = \varepsilon^{p+1} \frac{\sqrt{\pi}}{\text{Ste}} z \exp(z^2) \text{erf}(z), \quad z \geq 0, \quad (2.51)$$

$$\beta_\gamma(z) = 1 - \frac{2z \exp(z^2)}{\gamma \text{Ste}}, \quad 0 \leq z \leq \lambda_{0_\gamma} = \beta_\gamma^{-1}(0), \quad (2.52)$$

$$G_\gamma(z) = \frac{\lambda_\gamma \exp(\lambda_\gamma^2) \sqrt{\pi}}{\text{Ste}} (\text{erf}(\lambda_\gamma) - \text{erf}(z)), \quad 0 \leq z \leq \lambda_\gamma. \quad (2.53)$$

*Demostración.* La prueba es similar a la del Lema 2.1.

Sea  $(y_\gamma, \lambda_\gamma)$  una solución del problema diferencial ordinario definido por (2.17), (2.19)-(2.20) y (2.46).

Llamando  $w(\eta) = (1 + \delta y_\gamma^p(\eta)) y_\gamma'(\eta)$ , teniendo en cuenta la ecuación diferencial ordinaria (2.17) y las condiciones (2.19), (2.46), la función  $w$  se puede reescribir como

$$w(\eta) = y_\gamma'(\lambda_\gamma) \exp(\lambda_\gamma^2) \exp(-\eta^2),$$

y por lo tanto

$$y_\gamma'(\eta) + \delta y_\gamma^p(\eta) y_\gamma'(\eta) = y_\gamma'(\lambda_\gamma) \exp(\lambda_\gamma^2) \exp(-\eta^2). \quad (2.54)$$

Si se integra (2.54) desde  $\eta$  a  $\lambda_\gamma$  y se tienen en cuenta las condiciones (2.19), (2.20) y (2.46), se obtiene que  $y_\gamma$  verifica (2.49).

Al tomar  $\eta = 0$  en (2.49) se tiene:

$$y_\gamma(0) + \frac{\delta}{p+1} y_\gamma^{p+1}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\text{Ste}} \lambda_\gamma \exp(\lambda_\gamma^2) \text{erf}(\lambda_\gamma). \quad (2.55)$$

Además, si se deriva (2.49) con respecto a  $\eta$  y se calcula esta derivada en  $\eta = 0$  se tiene:

$$y_\gamma'(0) + \delta y_\gamma^p(0) y_\gamma'(0) = -\frac{2\lambda_\gamma \exp(\lambda_\gamma^2)}{\text{Ste}}, \quad (2.56)$$

y de (2.46) y (2.56) se obtiene que  $\lambda_\gamma$  es solución de la ecuación (2.48).

Recíprocamente, si  $(y_\gamma, \lambda_\gamma)$  es una solución a (2.48)-(2.53), fácilmente se puede ver que  $(y_\gamma, \lambda_\gamma)$  verifica la ecuación (2.17) y las condiciones (2.19)-(2.20) y (2.46). ■

**Lema 2.4.** *Si  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ ,  $p \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$  y  $\gamma > 0$ , entonces existe una única solución  $(y_\gamma, \lambda_\gamma)$  del problema funcional (2.48)-(2.53) con  $\lambda_\gamma > 0$ ,  $y_\gamma \in C^2(0, \lambda_\gamma)$  y  $y_\gamma \geq 0$ .*

*Demostración.* Por un lado, nótese que la función  $f_\varepsilon$  dada por (2.51) es una función creciente en  $[0, \lambda_{0_\gamma}]$  tal que  $f_\varepsilon(0) = 0$  y  $f_\varepsilon(\lambda_{0_\gamma}) > 0$  con  $\lambda_{0_\gamma} = \beta_\gamma^{-1}(0)$ .

Por otro lado,  $F_\varepsilon(\beta_\gamma)$  con  $F_\varepsilon$  dada por (2.50) y  $\beta_\gamma$  dada por (2.52), es una función decreciente para  $0 \leq z \leq \lambda_{0_\gamma}$ . Además,

$$F_\varepsilon(\beta_\gamma(0)) = F_\varepsilon(1) = \varepsilon^p + \frac{\delta}{p+1}, \quad F_\varepsilon(\beta_\gamma(\lambda_{0_\gamma})) = F_\varepsilon(0) = 0.$$

Por lo tanto, se puede concluir que existe un único valor  $0 < \lambda_\gamma < \lambda_{0_\gamma}$  que verifica la ecuación (2.48).

Fijado  $\lambda_\gamma > 0$ . La función  $F$  definida por (2.24) es creciente en  $[0, +\infty)$ , entonces es posible definir  $F^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ . Como  $G_\gamma$  dada por (2.53) es una función positiva en  $[0, \lambda_\gamma]$ , se tiene que existe una única solución  $y \in C^2(0, \lambda_\gamma)$  de la ecuación (2.49) dada por

$$y_\gamma(\eta) = F^{-1}(G_\gamma(\eta)), \quad 0 \leq \eta \leq \lambda_\gamma. \quad (2.57)$$

■

Finalmente, del Teorema 2.3 y de los dos lemas anteriores es posible afirmar el siguiente resultado:

**Teorema 2.4.** Sean  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ ,  $p \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$  y  $\gamma > 0$ . El problema de Stefan definido por (2.3), (2.5)-(2.8) tiene una única solución de tipo similaridad  $(T_\gamma, s_\gamma)$  dada por (2.44)-(2.45) donde  $(y_\gamma, \lambda_\gamma)$  es la única solución del problema funcional definido por (2.48)-(2.53) siendo  $\lambda_\gamma > 0$ ,  $y_\gamma \in C^2(0, \lambda_\gamma)$  y  $y_\gamma \geq 0$ .

**Observación 2.6.** Por un lado,  $G_\gamma$  dada por (2.53) es una función decreciente en  $[0, \lambda_\gamma]$  con  $G_\gamma(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\text{Ste}} \lambda_\gamma \exp(\lambda_\gamma^2) \text{erf}(\lambda_\gamma)$  y  $G_\gamma(\lambda_\gamma) = 0$ .

Por otro lado,  $F$  definida por (2.24) es una función creciente en  $[0, 1]$  y verifica  $F(0) = 0$  y  $F(1) = 1 + \frac{\delta}{p+1}$ .

Así,  $y_\gamma$  es una función decreciente en  $[0, \lambda_\gamma]$  y por (2.57) se tiene la relación

$$y_\gamma(0) = F^{-1}(G_\gamma(0)) = \beta_\gamma(\lambda_\gamma) = 1 - \frac{2\lambda_\gamma \exp(\lambda_\gamma^2)}{\gamma \text{Ste}} < 1,$$

de lo que sigue que:

$$0 \leq y_\gamma(\eta) \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq \lambda_\gamma,$$

y del Teorema 2.3, se tiene entonces:

$$T_f \leq T_\gamma(x, t) \leq T_0, \quad 0 \leq x \leq s_\gamma(t), \quad t \geq 0.$$

Las soluciones a problemas con condición de contorno de tipo Neumann o Robin en el borde fijo se pueden obtener como consecuencia directa del Teorema 2.4 fijando  $\varepsilon = 0$  ó  $\varepsilon = 1$ , respectivamente. Por lo tanto son inmediatos los siguientes resultados:

**Corolario 2.1 (Caso  $\varepsilon = 0$ ).** Sean  $p \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$  y  $\gamma > 0$ . El problema de Stefan dado por (2.3), (2.5)-(2.7) y la condición de tipo Neumann (2.9) tiene una única solución de tipo similaridad  $(T_\gamma, s_\gamma)$  dada por (2.44)-(2.45) donde  $y_\gamma \in C^2(0, \lambda_\gamma)$ ,  $y_\gamma \geq 0$  es la única solución de (2.49) y  $\lambda_\gamma$  es la única solución de la ecuación:

$$z \exp(z^2) = \frac{\gamma}{2} \text{Ste}, \quad z > 0.$$

**Corolario 2.2 (Caso  $\varepsilon = 1$ ).** Sean  $p \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$  y  $\gamma > 0$ . El problema de Stefan dado por (2.3), (2.5)-(2.7) y la condición de tipo Robin (2.10) tiene una única solución de tipo similaridad  $(T_\gamma, s_\gamma)$  dada por (2.44)-(2.45) donde  $y_\gamma \in C^2(0, \lambda_\gamma)$ ,  $y_\gamma \geq 0$  es la única solución de (2.49) y  $\lambda_\gamma$  es la única solución de la ecuación:

$$F(\beta_\gamma(z)) = f(z), \quad z > 0,$$

con  $f$ ,  $F$  y  $\beta_\gamma$  dadas por (2.23), (2.24) y (2.52), respectivamente.

Teniendo en cuenta los Lemas 2.3 y 2.4, se calcula la solución  $(y_\gamma, \lambda_\gamma)$  del problema diferencial ordinario (2.17), (2.19), (2.20) y (2.46), usando su formulación funcional (2.48)-(2.53). La Figura 2.2a muestra la función  $y_\gamma$  para un valor fijo de  $\delta = 5$ ,  $\gamma = 50$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\text{Ste} = 0.5$ , variando  $p = 1, 5, 10$ . Como se hizo para el problema con una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo  $x = 0$ , la solución  $y_\gamma$  se extiende por cero para cada  $\eta > \lambda_\gamma$ .

Si se aplica el Teorema 2.3, se puede graficar la solución  $(T_\gamma, s_\gamma)$  del problema (2.3), (2.5)-(2.8). En la Figura 2.2b se presenta un mapa de colores para la temperatura  $T_\gamma(x, t)$  extendiendo por cero para  $x > s_\gamma(t)$ .

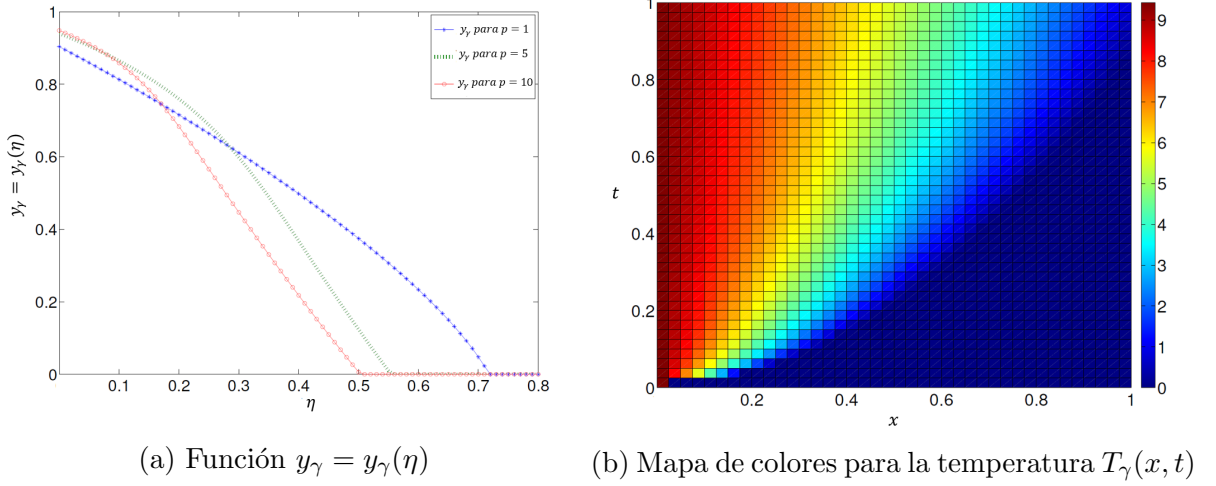


Figura 2.2: (a) Gráfica de la función  $y_\gamma = y_\gamma(\eta)$  para diferentes valores de  $p = 1, 5, 10$ , fijando  $\delta = 5$ ,  $\gamma = 50$ ,  $\varepsilon = 1$  y  $\text{Ste} = 0.5$ . (b) Mapa de colores para la temperatura  $T_\gamma = T_\gamma(x, t)$  fijando  $\delta = 1$ ,  $\gamma = 50$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $p = 1$ ,  $\text{Ste} = 0.5$ ,  $T_f = 0$ ,  $T_0 = 10$  y  $a = 1$ .

### 2.1.3. Comportamiento asintótico

Se mostrará ahora que si el coeficiente  $\gamma$ , que caracteriza el flujo de calor en el borde fijo, tiende a infinito entonces la solución al problema con condición de tipo Robin (2.3),(2.5)-(2.7) y (2.10) converge a la solución del problema (2.3)-(2.7), con una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo  $x = 0$ .

Para obtener la convergencia será necesario probar el siguiente resultado preliminar:

**Lema 2.5.** Sean  $\gamma > 0$ ,  $p \geq 0$  y  $\delta > 0$ . Si  $\lambda_\gamma$  es la única solución de la ecuación (2.48) y  $\lambda$  es la única solución de la ecuación (2.21), entonces la sucesión  $\{\lambda_\gamma\}$  es creciente y acotada. Más aún,

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \lambda_\gamma = \lambda.$$

*Demostración.* Dados  $\gamma_1 < \gamma_2$ , resulta  $\beta_{\gamma_1}(z) < \beta_{\gamma_2}(z)$  y por lo tanto  $F(\beta_{\gamma_1}) < F(\beta_{\gamma_2})$  donde  $F$  está dada por (2.24) y  $\beta_\gamma$  está definida por (2.52).

Puesto que  $f$  definida por (2.23) es una función creciente en  $[0, +\infty)$ , resulta  $\lambda_{\gamma_1} < \lambda_{\gamma_2}$  y así la sucesión  $\{\lambda_\gamma\}_{\gamma > 0}$  es creciente.

Además,  $\beta_\gamma(\lambda_\gamma) \leq 1$  y dado que  $F$  es creciente en  $[0, +\infty)$ ,  $F(\beta_\gamma(\lambda_\gamma)) \leq F(1) = g$  con lo cual  $f(\lambda_\gamma) \leq g$  y por lo tanto  $\lambda_\gamma \leq f^{-1}(g) = \lambda$ . Así, existe  $\lambda^*$  tal que  $\lambda_\gamma \rightarrow \lambda^*$  cuando  $\gamma \rightarrow +\infty$ .

Teniendo en cuenta que  $\beta_\gamma(\lambda_\gamma) = 1 - \frac{2\lambda_\gamma \exp(\lambda_\gamma^2)}{\gamma \text{Ste}} \rightarrow 1$  si  $\gamma \rightarrow +\infty$ , entonces:

$$\begin{aligned} f(\lambda^*) &= f\left(\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \lambda_\gamma\right) = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} f(\lambda_\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} F(\beta_\gamma(\lambda_\gamma)) \\ &= F\left(\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \beta_\gamma(\lambda_\gamma)\right) = F\left(\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2\lambda_\gamma \exp(\lambda_\gamma^2)}{\gamma \text{Ste}}\right)\right) = F(1) = g, \end{aligned}$$

por lo que  $\lambda^*$  satisface la ecuación (2.21) y como ésta tiene única solución, resulta entonces  $\lambda^* = \lambda$ . ■

**Lema 2.6.** Sean  $\gamma > 0$ ,  $p \geq 0$  y  $\delta > 0$ . Si  $(y_\gamma, \lambda_\gamma)$  es la única solución del problema diferencial ordinario (2.17), (2.19), (2.20) y (2.46), y el par  $(y, \lambda)$  es la única solución del problema diferencial ordinario (2.17)-(2.20), entonces para cada  $\eta \in [0, \lambda]$  vale la siguiente convergencia:

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} y_\gamma(\eta) = y(\eta). \quad (2.58)$$

*Demostración.* De acuerdo a los Lemas 2.3 y 2.4, se tiene que

$$y_\gamma(\eta) = F^{-1}(G_\gamma(\eta)), \quad 0 \leq \eta \leq \lambda_\gamma,$$

y, por otro lado,

$$y(\eta) = F^{-1}(G(\eta)), \quad 0 \leq \eta \leq \lambda,$$

donde las funciones  $F$ ,  $G$  y  $G_\gamma$  están dadas por (2.24) y (2.53), respectivamente.

Sea  $\eta \in [0, \lambda]$ . Debido al Lema 2.5, existe  $\gamma_0$  tal que  $\eta < \lambda_\gamma$ , para cada  $\gamma > \gamma_0$ .

Como  $G_\gamma(\eta) \rightarrow G(\eta)$  cuando  $\gamma \rightarrow +\infty$ , se obtiene:

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} y_\gamma(\eta) = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} F^{-1}(G_\gamma(\eta)) = F^{-1}\left(\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} G_\gamma(\eta)\right) = F^{-1}(G(\eta)) = y(\eta). \quad \blacksquare$$

Para ilustrar los resultados obtenidos en los Lemas 2.5 y 2.6, en la Figura 2.3 se grafica  $(y_\gamma, \lambda_\gamma)$  tomando  $\delta = 5$ ,  $p = 1$  y variando  $\gamma = 1, 25, 50, 100$ . Se muestra que a medida que  $\gamma$  crece, la función  $y_\gamma$  converge puntualmente a la solución  $y$  del problema (2.17)-(2.20).

**Teorema 2.5.** Sean  $\gamma > 0$ ,  $p \geq 0$  y  $\delta > 0$ . La única solución  $(T_\gamma, s_\gamma)$  del problema de Stefan definido por (2.3),(2.5)-(2.7) y (2.10) converge puntualmente a la única solución  $(T, s)$  del problema de Stefan (2.3)-(2.7) cuando  $\gamma \rightarrow +\infty$ .

*Demostración.* Sigue directamente de los Lemas 2.5, 2.6 y las fórmulas (2.14)-(2.15). ■

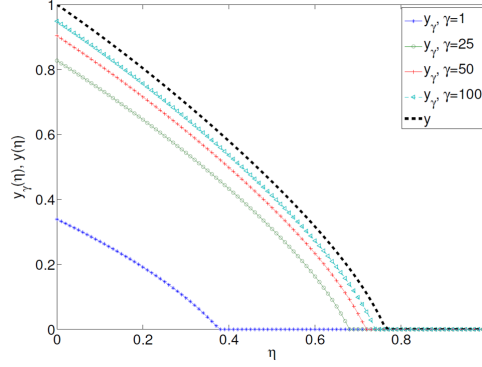


Figura 2.3: Funciones:  $y_\gamma = y_\gamma(\eta)$  para  $\gamma = 1, 25, 50, 100$ , y  $y = y(\eta)$ , fijando  $p = 1$  y  $\delta = 5$ .

## 2.2. Problemas de conducción de calor con conductividad térmica dependiente de la temperatura

Se considera un problema de Stefan unidimensional a una fase para la solidificación de un material semi-infinito  $x > 0$  con conductividad térmica  $k(T)$  no lineal y dependiente de la temperatura  $T = T(x, t)$  dada de la siguiente manera:

$$k(T) = k_0 \left( 1 + \delta \left( \frac{T - T_0}{T_f - T_0} \right)^p \right), \quad p \geq 1, \quad (2.59)$$

donde  $\delta$  es una constante positiva,  $k_0 = k(T_f)$  es la conductividad térmica de referencia,  $T_0$  es la temperatura ambiente y  $T_f > T_0$  es la temperatura de cambio de fase en la frontera libre desconocida  $x = s(t)$ .

En este problema, se impone una condición de tipo Robin en el borde fijo  $x = 0$ . El modelo matemático que describe este proceso es el siguiente:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (2.60)$$

$$k(T(0, t)) \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{h}{\sqrt{t}} [T(0, t) - T_0], \quad t > 0, \quad (2.61)$$

$$T(s(t), t) = T_f, \quad t > 0, \quad (2.62)$$

$$k(T(s(t), t)) \frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) = \rho \ell \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (2.63)$$

$$s(0) = 0, \quad (2.64)$$

donde  $\rho > 0$  es la densidad,  $c > 0$  es el calor específico,  $h > 0$  es el coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en  $x = 0$  y  $\ell > 0$  es el calor latente por unidad de masa, son constantes dadas.

La existencia de solución del problema (2.60)-(2.64) cuando la conductividad térmica  $k = k(T)$  está definida por (2.59) con  $p = 1$  ha sido probada en [66] a través de la existencia de la llamada *función de error generalizada* que se define como la solución de un problema diferencial ordinario de segundo orden que surge a través de la variable de semejanza.

Motivado por [73], se estudia el siguiente problema de conducción de calor para un material semi-infinito  $x > 0$  que surge del problema de Stefan definido por (2.60)-(2.64) donde la conductividad térmica está dada por (2.59):

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (2.65)$$

$$k(T(0, t)) \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{h}{\sqrt{t}} [T(0, t) - T_0], \quad t > 0, \quad (2.66)$$

$$T(+\infty, t) = T_f, \quad t > 0. \quad (2.67)$$

En esta sección se probará la existencia de única solución del problema de conducción de calor (2.65)-(2.67) a través de la equivalencia con un problema diferencial ordinario de segundo orden cuya solución es la que se denomina *función de error modificada p-generalizada*.

### 2.2.1. La función de error modificada p-generalizada

Se desea obtener una solución de tipo similaridad del problema (2.65)-(2.67) por lo que se busca expresar a la temperatura  $T = T(x, t)$  como una función de una sola variable. Así, mediante la transformación:

$$y(\eta) = \frac{T(x, t) - T_0}{T_f - T_0}, \quad (2.68)$$

donde la variable de semejanza  $\eta$  es definida por

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_0 t}}, \quad (2.69)$$

siendo  $\alpha_0 = \frac{k_0}{\rho c}$  la difusividad térmica, se tiene que

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{2t} (T_f - T_0) \eta y'(\eta), \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_0 t}} (T_f - T_0) y'(\eta),$$

y reemplazando estas expresiones en la ecuación (2.65), se obtiene que la función  $y = y(\eta)$  debe satisfacer la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$[(1 + \delta y^p(\eta)) y'(\eta)]' + 2\eta y'(\eta) = 0, \quad 0 < \eta < +\infty.$$

Además, la condición (2.66) implica que

$$\frac{k_0}{2\sqrt{\alpha_0 t}} (1 + \delta y^p(0)) (T_f - T_0) y'(0) = \frac{h(T_f - T_0)}{\sqrt{t}} y(0),$$

resultando la siguiente condición:

$$(1 + \delta y^p(0)) y'(0) - \gamma y(0) = 0,$$

siendo  $\gamma = 2\text{Bi}$  donde  $\text{Bi} = \frac{h\sqrt{\alpha_0}}{k_0}$  es el número de Biot generalizado.



Por último, de (2.67) se tiene

$$T(+\infty, t) = (T_f - T_0)y(+\infty) + T_0 = T_f,$$

y entonces se obtiene la condición:

$$y(+\infty) = 1.$$

Por lo tanto, la existencia de solución del problema (2.65)-(2.67) con la conductividad térmica  $k = k(T)$  dada por (2.59) será estudiada a través del siguiente problema diferencial ordinario no lineal:

$$[(1 + \delta y^p(\eta))y'(\eta)]' + 2\eta y'(\eta) = 0, \quad 0 < \eta < +\infty, \quad (2.70a)$$

$$(1 + \delta y^p(0))y'(0) - \gamma y(0) = 0, \quad (2.70b)$$

$$y(+\infty) = 1. \quad (2.70c)$$

Se probará entonces la existencia y unicidad de solución del problema (2.70), usando el Teorema de punto fijo de Banach. Para ello, sean los conjuntos:

$$X = \{h : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} / h \text{ es una función continua y acotada}\}, \quad (2.71)$$

$$K = \{h \in X / \|h\|_\infty \leq 1, 0 \leq h, h(+\infty) = 1\}. \quad (2.72)$$

Notar que  $K$  es un subconjunto convexo, cerrado, no vacío y acotado de un espacio de Banach  $X$  con la norma usual [79, 80, 142]:

$$\|h\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{R}_0^+} |h(z)| < \infty.$$

**Teorema 2.6.** Sean  $\delta \geq 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $p \geq 1$ . Para cada  $\gamma > 0$ , la función  $y_\gamma \in K$  es una solución del problema (2.70) si y solo si  $y_\gamma$  es un punto fijo del operador  $\mathcal{T}_\gamma : K \rightarrow K$  dado por:

$$\mathcal{T}_\gamma(h)(z) = \frac{1 + \gamma \int_0^z f_h(r) dr}{1 + \gamma \int_0^\infty f_h(r) dr}, \quad z \geq 0, \quad (2.73)$$

con

$$f_h(z) = \frac{1}{\Psi_h(z)} \exp\left(-2 \int_0^z \frac{\xi}{\Psi_h(\xi)} d\xi\right), \quad \Psi_h(z) = 1 + \delta h^p(z), \quad z \geq 0. \quad (2.74)$$

*Demostración.* Notar primero que para cada  $y = y_\gamma \in K$ , se tiene  $0 \leq y^p(\xi) \leq 1$ , para todo  $p \geq 1$  y como  $\delta \geq 0$  se obtiene:

$$1 \leq \Psi_y(\xi) = 1 + \delta y^p(\xi) \leq 1 + \delta, \quad \xi \geq 0,$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{1 + \delta} \leq \frac{1}{\Psi_y(\xi)} \leq 1, \quad \xi \geq 0.$$

Multiplicando la expresión anterior por  $-2\xi$  e integrando entre 0 y  $r$ , se obtiene:

$$-r^2 \leq -2 \int_0^r \frac{\xi}{\Psi_y(\xi)} d\xi \leq -\frac{r^2}{1+\delta},$$

de donde sigue:

$$\frac{\exp(-r^2)}{1+\delta} \leq \frac{\exp(-r^2)}{\Psi_y(r)} \leq \frac{1}{\Psi_y(r)} \exp\left(-2 \int_0^r \frac{\xi}{\Psi_y(\xi)} d\xi\right) \leq \frac{1}{\Psi_y(r)} \exp\left(-\frac{r^2}{1+\delta}\right) \leq \exp\left(-\frac{r^2}{1+\delta}\right),$$

es decir

$$\frac{\exp(-r^2)}{1+\delta} \leq f_y(r) \leq \exp\left(-\frac{r^2}{1+\delta}\right), \quad r \geq 0, \quad (2.75)$$

por lo que se tiene:

$$0 < \frac{\gamma\sqrt{\pi}}{2(1+\delta)} < 1 + \gamma \int_0^\infty f_y(r) dr \leq 1 + \frac{\gamma\sqrt{1+\delta}\sqrt{\pi}}{2}. \quad (2.76)$$

Resulta entonces, de acuerdo a (2.71)-(2.73) y (2.76), que  $\mathcal{T}_\gamma(y) \in K$  para todo  $y \in K$ .

Llamando  $v = y'$  y teniendo en cuenta que  $\Psi_y(\eta)$  está dada por (2.74), la ecuación diferencial ordinaria (2.70a) se transforma en

$$[\Psi_y(\eta)v(\eta)]' + 2\eta v(\eta) = 0,$$

o equivalentemente en

$$-\frac{\Psi_y'(\eta) + 2\eta}{\Psi_y(\eta)} = \frac{v'(\eta)}{v(\eta)}.$$

Integrando la ecuación anterior se obtiene:

$$v(\eta) = \frac{c_0}{\Psi_y(\eta)} \exp\left(-2 \int_0^\eta \frac{\xi}{\Psi_y(\xi)} d\xi\right),$$

con  $c_0 \in \mathbb{R}$ , y del hecho que  $v = y'$  se sigue que:

$$y(\eta) = y(0) + c_0 \int_0^\eta \frac{\exp\left(-2 \int_0^r \frac{\xi}{\Psi_y(\xi)} d\xi\right)}{\Psi_y(r)} dr,$$

es decir

$$y(\eta) = y(0) + c_0 \int_0^\eta f_y(r) dr.$$

Luego, la condición (2.70b) se satisface si y solo si  $c_0 = \gamma y(0)$ . Además, debido a (2.70c) se obtiene:

$$y(0) = \left(1 + \gamma \int_0^\infty f_y(r) dr\right)^{-1}. \quad (2.77)$$

Por lo tanto,

$$y(\eta) = \left(1 + \gamma \int_0^\infty f_y(r) dr\right)^{-1} \left(1 + \gamma \int_0^\eta f_y(r) dr\right), \quad (2.78)$$

es una solución al problema (2.70) si y solo si  $y = y(\eta)$  es un punto fijo del operador  $\mathcal{T}_\gamma$ , es decir,

$$y(\eta) = \mathcal{T}_\gamma(y)(\eta), \quad \forall \eta \geq 0.$$

Recíprocamente, si  $y = y(\eta)$  dada por (2.78) es un punto fijo del operador  $\mathcal{T}_\gamma$  se obtiene inmediatamente que (2.70c) se verifica con  $y(0)$  dado por (2.77). Luego, derivando (2.78) con respecto a  $\eta$ , (2.70a) y (2.70b) valen, y entonces  $y = y(\eta)$  es una solución de (2.70). ■

**Observación 2.7.** *Se elige la notación  $y_\gamma$ ,  $\mathcal{T}_\gamma$  para resaltar la dependencia de la solución del problema (2.70) de  $\gamma$ , a pesar de que también dependen de  $p$  y  $\delta$ . Este hecho facilitará el análisis sobre el comportamiento asintótico de  $y_\gamma$  cuando  $\gamma \rightarrow +\infty$ , que se presenta en la próxima subsección.*

En virtud del Teorema 2.6, se desea demostrar que  $\mathcal{T}_\gamma$  es un operador contractivo sobre  $K$ . Para tal propósito se presentan los siguientes lemas:

**Lema 2.7.** *Sean  $y_1, y_2 \in K$ ,  $\delta \geq 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $p \geq 1$  y  $z \geq 0$ . Entonces, valen las siguientes estimaciones:*

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{\sqrt{\pi}}{2(1+\delta)} \leq \int_0^\infty f_{y_1}(r) dr \leq \frac{\sqrt{(1+\delta)\pi}}{2}, \\ \text{b)} \quad & \left| \frac{1}{\Psi_{y_1}(\eta)} - \frac{1}{\Psi_{y_2}(\eta)} \right| \leq \delta p \|y_1 - y_2\|_\infty, \\ \text{c)} \quad & \left| \exp\left(\int_0^\eta \frac{-2\xi}{\Psi_{y_1}(\xi)} d\xi\right) - \exp\left(\int_0^\eta \frac{-2\xi}{\Psi_{y_2}(\xi)} d\xi\right) \right| \leq \frac{2\delta p \eta^2}{\exp\left(\frac{\eta^2}{1+\delta}\right)} \|y_1 - y_2\|_\infty, \\ \text{d)} \quad & \int_0^z |f_{y_1}(r) - f_{y_2}(r)| dr \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \delta p \sqrt{1+\delta} (2+\delta) \|y_1 - y_2\|_\infty, \\ \text{e)} \quad & \left| \frac{1}{1 + \gamma \int_0^\infty f_{y_1}(r) dr} - \frac{1}{1 + \gamma \int_0^\infty f_{y_2}(r) dr} \right| \leq \frac{2(1+\delta)^{5/2}}{\gamma\sqrt{\pi}} \delta p (2+\delta) \|y_1 - y_2\|_\infty. \end{aligned}$$

*Demostración.*

a) Es inmediata integrando (2.75) en  $(0, +\infty)$ .

b) Aplicando el Teorema del valor medio a la función  $m(z) = z^p$ , y del hecho que

$$1 \leq \Psi_y(x) \leq 1 + \delta,$$

para todo  $y \in K$ , se tiene:

$$\left| \frac{1}{\Psi_{y_1}(\eta)} - \frac{1}{\Psi_{y_2}(\eta)} \right| \leq \delta |y_2^p(\eta) - y_1^p(\eta)| \leq \delta p \|y_2 - y_1\|_\infty.$$

c) Aplicando el Teorema del valor medio a la función  $m(x) = \exp(-2z)$  y teniendo en cuenta el ítem b) se tiene que:

$$\begin{aligned} \left| \exp\left(\int_0^\eta \frac{-2\xi}{\Psi_{y_1}(\xi)} d\xi\right) - \exp\left(\int_0^\eta \frac{-2\xi}{\Psi_{y_2}(\xi)} d\xi\right) \right| &\leq 2 \exp\left(-\frac{\eta^2}{1+\delta}\right) \int_0^\eta \left| \frac{\xi}{\Psi_{y_1}(\xi)} - \frac{\xi}{\Psi_{y_2}(\xi)} \right| d\xi \\ &\leq 2 \exp\left(-\frac{\eta^2}{1+\delta}\right) \eta \int_0^\eta \left| \frac{1}{\Psi_{y_1}(\xi)} - \frac{1}{\Psi_{y_2}(\xi)} \right| d\xi \\ &\leq 2 \exp\left(-\frac{\eta^2}{1+\delta}\right) \delta p \eta^2 \|y_1 - y_2\|_\infty. \end{aligned}$$

d) De los ítems b) y c) se obtiene:

$$\begin{aligned} &\int_0^z |f_{y_1}(r) - f_{y_2}(r)| dr \\ &\leq \int_0^z \left\{ \left| f_{y_1}(r) - \frac{\exp\left(-2 \int_0^r \frac{\xi}{\Psi_{y_2}(\xi)} d\xi\right)}{\Psi_{y_1}(r)} \right| + \left| \frac{\exp\left(-2 \int_0^r \frac{\xi}{\Psi_{y_2}(\xi)} d\xi\right)}{\Psi_{y_1}(r)} - f_{y_2}(r) \right| \right\} dr \\ &\leq \int_0^z \left\{ \frac{1}{\Psi_{y_1}(r)} \left| \exp\left(\int_0^r \frac{-2\xi}{\Psi_{y_1}(\xi)} d\xi\right) - \exp\left(\int_0^r \frac{-2\xi}{\Psi_{y_2}(\xi)} d\xi\right) \right| \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(\int_0^r \frac{-2\xi}{\Psi_{y_2}(\xi)} d\xi\right) \left| \frac{1}{\Psi_{y_1}(r)} - \frac{1}{\Psi_{y_2}(r)} \right| \right\} dr \\ &\leq \delta p \int_0^z \exp\left(\frac{-r^2}{1+\delta}\right) (2r^2 + 1) dr \|y_1 - y_2\|_\infty \\ &= \delta p \sqrt{1+\delta} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2+\delta) \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{1+\delta}}\right) - z \sqrt{1+\delta} \exp\left(\frac{-z^2}{1+\delta}\right) \right] \|y_1 - y_2\|_\infty \\ &\leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \delta p \sqrt{1+\delta} (2+\delta) \|y_1 - y_2\|_\infty. \end{aligned}$$

e) De (2.76) y del ítem d) se tiene que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1 + \gamma \int_0^\infty f_{y_1}(r) dr} - \frac{1}{1 + \gamma \int_0^\infty f_{y_2}(r) dr} \right| &\leq \frac{\gamma \int_0^\infty |f_{y_2}(r) - f_{y_1}(r)| dr}{\left(1 + \gamma \int_0^\infty f_{y_1}(r) dr\right) \left(1 + \gamma \int_0^\infty f_{y_2}(r) dr\right)} \\ &\leq \gamma \frac{\sqrt{\pi}}{2} \delta p \sqrt{1+\delta} (2+\delta) \left(\frac{2(1+\delta)}{\gamma \sqrt{\pi}}\right)^2 \|y_1 - y_2\|_\infty \\ &\leq \frac{2(1+\delta)^{5/2}}{\gamma \sqrt{\pi}} \delta p (2+\delta) \|y_1 - y_2\|_\infty. \end{aligned}$$

■

**Lema 2.8.** Sean  $\gamma > 0$ ,  $p \geq 1$  y

$$g_\gamma(z) = pz(1+z)^{3/2}(2+z) \left( 1 + (1+z)^{3/2} + \frac{2}{\gamma \sqrt{\pi}}(1+z) \right), \quad z \geq 0, \quad (2.79)$$

entonces existe un único valor  $\delta_\gamma > 0$  tal que  $g_\gamma(\delta_\gamma) = 1$  y  $g_\gamma(z) < 1$  para todo  $0 \leq z < \delta_\gamma$ .

*Demostración.* Sigue inmediatamente del hecho que  $g_\gamma = g_\gamma(z)$  es una función creciente en  $[0, +\infty)$  y además verifica que  $g_\gamma(0) = 0$  y  $g_\gamma(+\infty) = +\infty$ . ■

Ahora es posible formular el siguiente resultado:

**Teorema 2.7.** *Sea  $\gamma > 0$  y  $p \geq 1$ . El problema (2.70) tiene una única solución  $y_\gamma \in K$  si y solo si  $0 \leq \delta < \delta_\gamma$  donde  $\delta_\gamma$  está dada por el Lema 2.8. Más aún,  $y_\gamma$  es una función  $C^\infty(\mathbb{R}^+)$ .*

*Demostración.* Sean  $y_1, y_2 \in K$  y  $z \geq 0$ . Teniendo en cuenta el Lema 2.7, se obtiene:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}_\gamma(y_1)(z) - \mathcal{T}_\gamma(y_2)(z)| &\leq \left| \frac{1 + \gamma \int_0^z f_{y_1}(r) dr}{1 + \gamma \int_0^\infty f_{y_1}(r) dr} - \frac{1 + \gamma \int_0^z f_{y_2}(r) dr}{1 + \gamma \int_0^\infty f_{y_1}(r) dr} \right| \\
&\quad + \left| \frac{1 + \gamma \int_0^z f_{y_2}(r) dr}{1 + \gamma \int_0^\infty f_{y_1}(r) dr} - \frac{1 + \gamma \int_0^z f_{y_2}(r) dr}{1 + \gamma \int_0^\infty f_{y_2}(r) dr} \right| \\
&\leq \frac{\gamma \int_0^z |f_{y_1}(r) - f_{y_2}(r)| dr}{\left| 1 + \gamma \int_0^\infty f_{y_1}(r) dr \right|} \\
&\quad + \left| 1 + \gamma \int_0^z f_{y_2}(r) dr \right| \left| \frac{1}{1 + \gamma \int_0^\infty f_{y_1}(r) dr} - \frac{1}{1 + \gamma \int_0^\infty f_{y_2}(r) dr} \right| \\
&\leq g_\gamma(\delta) \|y_1 - y_2\|_\infty,
\end{aligned}$$

donde  $g_\gamma$  está dada por (2.79).

Entonces del Lema 2.8, si  $0 \leq \delta < \delta_\gamma$  se sigue que  $\mathcal{T}_\gamma$  es un operador contractivo y por lo tanto es posible aplicar el Teorema del punto fijo de Banach. Además, el problema (2.70) tiene una única solución no negativa y continua. Más aún, mediante simples cálculos es fácil ver que la única solución es una función  $C^\infty(\mathbb{R}^+)$ . ■

**Observación 2.8.** *A la única solución del problema diferencial ordinario (2.70) se la denomina función de error modificada  $p$ -generalizada.*

## 2.2.2. Comportamiento asintótico

En esta sección se considera el problema de conducción del calor (2.65)-(2.67) que surge del problema de Stefan a una fase (2.60)-(2.64) en el cual se cambia la condición de tipo Robin en el borde fijo (2.61) por una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo  $x = 0$ :

$$T(0, t) = T_0 > 0, \quad t > 0. \quad (2.80)$$

De igual modo a lo realizado en la subsección anterior, se desea hallar una solución de tipo similitud del problema definido por (2.65), (2.67) y (2.80) por lo que se busca expresar a la temperatura  $T = T(x, t)$  como una función de una sola variable. Así, mediante

el cambio de variable (2.68)-(2.69), se obtiene el siguiente problema diferencial ordinario equivalente:

$$[(1 + \delta y^p(\eta))y'(\eta)]' + 2\eta y'(\eta) = 0, \quad 0 < \eta < +\infty, \quad (2.81a)$$

$$y(0) = 0, \quad (2.81b)$$

$$y(+\infty) = 1. \quad (2.81c)$$

Para el caso particular  $p = 1$ , la solución a este problema es llamada *función de error modificada*, fue estudiada en [34, 65, 66, 73, 152] y se probó existencia y unicidad en [65]. Para el caso  $\delta = 0$ , la solución es la función de error clásica definida por:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-r^2) dr, \quad z \geq 0. \quad (2.82)$$

De forma similar a lo realizado en la subsección previa es posible analizar la existencia y unicidad de la función de error modificada  $p$ -generalizada la cual se define como la solución al problema (2.81) y constituye una generalización de la función de error modificada. Para ello, se define el conjunto:

$$K^* = \{h \in X / \|h\|_\infty \leq 1, 0 \leq h, h(0) = 0, h(+\infty) = 1\},$$

donde  $X$  está dado por (2.71). Notar que  $K^*$  es un conjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado del espacio de Banach  $X$ . Se mostrará que el problema diferencial ordinario (2.81) es equivalente a una ecuación integral.

**Teorema 2.8.** *Sea  $\delta \geq 0$ ,  $p \geq 1$ . La función  $y^* \in K^*$  es una solución del problema (2.81) si y solo si  $y^*$  es un punto fijo del operador  $\mathcal{T}^* : K^* \rightarrow K^*$  dado por:*

$$\mathcal{T}^*(h)(z) = \frac{\int_0^z f_h(r) dr}{\int_0^\infty f_h(r) dr}, \quad z \geq 0, \quad (2.83)$$

con  $f_h$  definida por (2.74).

*Demostración.* De forma similar a la prueba del Teorema 2.6, el operador  $\mathcal{T}^*$  está bien definido. En efecto: para cada  $y^* \in K^*$ , integrando (2.75) en  $[0, +\infty)$  se obtiene:

$$0 < \frac{\sqrt{\pi}}{2(1 + \delta)} \leq \int_0^\infty f_{y^*}(r) dr \leq \frac{\sqrt{1 + \delta}\sqrt{\pi}}{2}, \quad (2.84)$$

por lo tanto  $\mathcal{T}^*(y^*) \in K^*$  para todo  $y^* \in K^*$ .

De manera análoga a lo demostrado en el Teorema 2.6, es fácil ver que:

$$y^*(z) = y^*(0) + c_0^* \int_0^z f_{y^*}(r) dr,$$

con  $y^*(0) = 0$  y  $c_0^* = \left( \int_0^\infty f_{y^*}(r) dr \right)^{-1}$ . Por lo tanto,

$$y^*(z) = \left( \int_0^\infty f_{y^*}(r) dr \right)^{-1} \int_0^z f_{y^*}(r) dr, \quad (2.85)$$

es una solución del problema (2.81) si y solo si  $y^* = y^*(z)$  es un punto fijo del operador  $\mathcal{T}^*$ , es decir

$$y^*(z) = \mathcal{T}^*(y^*)(z), \quad \forall z \geq 0.$$

Recíprocamente, es fácil ver que si  $y^* = y^*(z)$  dada por (2.85) es un punto fijo del operador  $\mathcal{T}^*$ , entonces  $y^*$  es una solución del problema (2.81). ■

Para demostrar que el operador  $\mathcal{T}^*$  es un operador contractivo sobre  $K^*$ , se enunciarán los siguientes lemas cuyas demostraciones son análogas a la de los Lemas 2.7 y 2.8.

**Lema 2.9.** Sean  $y_1^*, y_2^* \in K^*$ ,  $\delta \geq 0$  y  $p \geq 1$ . Entonces, vale la siguiente acotación:

$$\left| \frac{1}{\int_0^\infty f_{y_1^*}(r) dr} - \frac{1}{\int_0^\infty f_{y_2^*}(r) dr} \right| \leq \frac{2(1+\delta)^{5/2}}{\sqrt{\pi}} \delta p(2+\delta) \|y_1^* - y_2^*\|_\infty.$$

*Demostración.* De manera similar a la demostración de la estimación e) del Lema 2.7 se tiene:

$$\left| \frac{1}{\int_0^\infty f_{y_1^*}(r) dr} - \frac{1}{\int_0^\infty f_{y_2^*}(r) dr} \right| \leq \frac{\int_0^\infty |f_{y_2^*}(r) - f_{y_1^*}(r)| dr}{\int_0^\infty f_{y_1^*}(r) dr \int_0^\infty f_{y_2^*}(r) dr} \leq \frac{2(1+\delta)^{5/2}}{\gamma\sqrt{\pi}} \delta p(2+\delta) \|y_1^* - y_2^*\|_\infty. ■$$

**Lema 2.10.** Sean  $p \geq 1$  y

$$g^*(z) = zp(1+z)^{3/2}(2+z) \left(1 + (1+z)^{3/2}\right), \quad z \geq 0,$$

entonces existe un único valor  $\delta^* > 0$  tal que  $g^*(\delta^*) = 1$  y  $g^*(z) < 1$  para todo  $0 \leq z < \delta^*$ .

*Demostración.* Sigue del hecho que  $g^* = g^*(z)$  es una función creciente en  $[0, +\infty)$  con  $g^*(0) = 0$  y  $g^*(+\infty) = +\infty$ . ■

**Teorema 2.9.** El problema (2.81) tiene una única solución  $y^* \in K^*$  si y solo si  $0 \leq \delta < \delta^*$  donde  $\delta^*$  está dado por el Lema 2.10. Además,  $y^*$  es una función  $C^\infty(\mathbb{R}^+)$ .

*Demostración.* Sean  $y_1^*, y_2^* \in K^*$  y  $z \geq 0$ . Teniendo en cuenta los Lemas 2.7 y 2.9 se

obtiene:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}^*(y_1^*)(z) - \mathcal{T}^*(y_2^*)(z)| &\leq \left| \frac{\int_0^z f_{y_1^*}(r) dr}{\int_0^\infty f_{y_1^*}(r) dr} - \frac{\int_0^z f_{y_2^*}(r) dr}{\int_0^\infty f_{y_1^*}(r) dr} \right| \\
&\quad + \left| \frac{\int_0^z f_{y_2^*}(r) dr}{\int_0^\infty f_{y_1^*}(r) dr} - \frac{\int_0^z f_{y_2^*}(r) dr}{\int_0^\infty f_{y_2^*}(r) dr} \right| \\
&\leq \frac{\int_0^z |f_{y_1^*}(r) - f_{y_2^*}(r)| dr}{\left| \int_0^\infty f_{y_1^*}(r) dr \right|} \\
&\quad + \left| \int_0^z f_{y_2^*}(r) dr \right| \left| \frac{1}{\int_0^\infty f_{y_1^*}(r) dr} - \frac{1}{\int_0^\infty f_{y_2^*}(r) dr} \right| \\
&\leq g^*(\delta^*) \|y_1^* - y_2^*\|_\infty.
\end{aligned}$$

Entonces del Lema 2.10, si  $0 \leq \delta < \delta^*$  se sigue que  $\mathcal{T}^*$  es un operador contractivo y es posible aplicar el Teorema del punto fijo de Banach. Además, el problema (2.81) tiene una única solución no negativa que también es una función  $C^\infty(\mathbb{R}^+)$ . ■

En el problema (2.70), se impuso una condición de frontera de tipo Robin caracterizada por el coeficiente  $\gamma > 0$  en  $x = 0$ . Esta condición constituye una generalización de la condición de Dirichlet en el sentido que si se toma el límite cuando  $\gamma \rightarrow \infty$  en la condición (2.70b) se obtiene la condición (2.81b). A continuación se demostrará que la solución del problema (2.70) converge a la solución del problema (2.81) cuando  $\gamma \rightarrow \infty$ . Para tal propósito, primero es necesario enunciar los siguientes lemas cuyas pruebas son inmediatas.

**Lema 2.11.** *Para cada  $p \geq 1$ , cuando  $\gamma \rightarrow +\infty$ , valen los siguientes resultados de convergencia:*

- a)  $\mathcal{T}_\gamma(h)(z) \rightarrow \mathcal{T}^*(h)(z)$  para cada  $h \in K$  y  $z \geq 0$ .
- b)  $g_\gamma(z) \rightarrow g^*(z)$  para cada  $z \geq 0$ .
- c)  $\delta_\gamma \rightarrow \delta^*$ .

Además  $g_\gamma(z) \geq g^*(z)$  y  $\delta_\gamma < \delta^*$  para todo  $z \geq 0, \gamma > 0$ .

**Lema 2.12.** *Sea  $p \geq 1$  y*

$$C(z) = 2zp(1+z)^3(2+z), \quad z \geq 0, \quad (2.86)$$

entonces existe un único  $\hat{\delta} > 0$  tal que  $C(\hat{\delta}) = 1$  y  $0 \leq C(z) < 1$  para todo  $0 \leq z < \hat{\delta}$ .



**Teorema 2.10.** Sean  $p \geq 1$  y  $0 \leq \delta < \min\{\hat{\delta}, \delta_\gamma\}$ . Entonces  $\|y_\gamma - y^*\|_\infty \rightarrow 0$  cuando  $\gamma \rightarrow +\infty$ . Además, el orden de convergencia es  $\frac{1}{\gamma}$  cuando  $\gamma \rightarrow +\infty$ .

*Demostración.* Primero notar que si  $0 \leq \delta < \min\{\hat{\delta}, \delta_\gamma\}$  entonces como  $\delta_\gamma < \delta^*$ , se obtiene que  $y_\gamma$  y  $y^*$  están bien definidas por los Teoremas 2.7 y 2.9.

Entonces para  $z \geq 0$  se tiene:

$$\begin{aligned}
|y_\gamma(z) - y^*(z)| &= \left| \frac{1 + \gamma \int_0^z f_{y_\gamma}(r) dr}{1 + \gamma \int_0^\infty f_{y_\gamma}(r) dr} - \frac{1 + \gamma \int_0^z f_{y^*}(r) dr}{1 + \gamma \int_0^\infty f_{y^*}(r) dr} \right| \\
&= \left| \frac{(1 + \gamma \int_0^z f_{y_\gamma}(r) dr) \int_0^\infty f_{y^*}(r) dr - \int_0^z f_{y^*}(r) dr (1 + \gamma \int_0^\infty f_{y_\gamma}(r) dr)}{(1 + \gamma \int_0^\infty f_{y_\gamma}(r) dr) (\int_0^\infty f_{y^*}(r) dr)} \right| \\
&= \left| \frac{\int_0^\infty f_{y^*}(r) dr + \gamma \int_0^z f_{y_\gamma}(r) dr \int_0^\infty f_{y^*}(r) dr - \int_0^z f_{y^*}(r) dr - \gamma \int_0^z f_{y^*}(r) dr \int_0^\infty f_{y_\gamma}(r) dr}{(1 + \gamma \int_0^\infty f_{y_\gamma}(r) dr) (\int_0^\infty f_{y^*}(r) dr)} \right| \\
&= \left| \frac{\int_0^\infty f_{y^*}(r) dr + \gamma \int_0^z f_{y_\gamma}(r) dr \int_0^\infty f_{y^*}(r) dr - \int_0^z f_{y^*}(r) dr - \gamma \int_0^z f_{y^*}(r) dr \int_0^\infty f_{y_\gamma}(r) dr + \gamma \int_0^z f_{y_\gamma}(r) dr \int_0^\infty f_{y_\gamma}(r) dr + \gamma \int_0^z f_{y_\gamma}(r) dr \int_0^\infty f_{y^*}(r) dr}{(1 + \gamma \int_0^\infty f_{y_\gamma}(r) dr) (\int_0^\infty f_{y^*}(r) dr)} \right| \\
&\leq \frac{\int_0^\infty f_{y^*}(r) dr + \gamma \int_0^z f_{y_\gamma}(r) dr \int_0^\infty |f_{y^*}(r) - f_{y_\gamma}(r)| dr + \gamma \int_0^z f_{y_\gamma}(r) dr \int_0^\infty |f_{y_\gamma}(r) - f_{y^*}(r)| dr}{(1 + \gamma \int_0^\infty f_{y_\gamma}(r) dr) (\int_0^\infty f_{y^*}(r) dr)} \\
&\leq \frac{\sqrt{1 + \delta} \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 2\gamma \sqrt{1 + \delta} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty |f_{y^*}(r) - f_{y_\gamma}(r)| dr}{\frac{\gamma \sqrt{\pi}}{2(1+\delta)} \frac{\sqrt{\pi}}{2(1+\delta)}} \\
&\leq \frac{\sqrt{1 + \delta} \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \gamma \sqrt{1 + \delta} \sqrt{\pi} \delta p \sqrt{1 + \delta} \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2 + \delta) \|y_\gamma - y^*\|_\infty}{\frac{\gamma \pi}{4(1+\delta)^2}} \\
&\leq \frac{4(1 + \delta)^2}{\gamma \pi} \left( \sqrt{1 + \delta} \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \gamma \frac{\pi}{2} \delta p (1 + \delta) (2 + \delta) \|y_\gamma - y^*\|_\infty \right) \\
&= \frac{2(1 + \delta)^{5/2}}{\gamma \sqrt{\pi}} + 2(1 + \delta)^3 \delta p (2 + \delta) \|y_\gamma - y^*\|_\infty \\
&= \frac{2(1 + \delta)^{5/2}}{\gamma \sqrt{\pi}} + C(\delta) \|y_\gamma - y^*\|_\infty.
\end{aligned}$$

Luego,

$$(1 - C(\delta)) \|y_\gamma - y^*\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma} \left( \frac{2(1 + \delta)^{5/2}}{\sqrt{\pi}} \right),$$

con  $C$  definida por (2.86). Finalmente, la convergencia deseada y el orden de convergencia se obtienen notando que si  $0 \leq \delta < \hat{\delta}$ , entonces  $0 \leq C(\delta) < 1$  por el Lema 2.12. ■

## Capítulo 3

# Soluciones exactas de problemas de Stefan a una fase con coeficientes térmicos variables con fuentes de calor

En este capítulo, y motivado por [56], se demuestra la existencia y unicidad de solución de tipo similaridad de problemas de Stefan a una fase para un material semi-infinito  $x > 0$ , gobernados por una ecuación no clásica y no lineal del calor con diferentes tipos de fuentes de calor. Se asume una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo  $x = 0$  y, conductividad térmica y calor específico dependientes de la temperatura.

La función de control representa un término de fuente de calor para la ecuación de calor no lineal. Varios trabajos brindan el significado del término fuente en el interior del material que puede sufrir en un cambio de fase [51, 172].

Este capítulo está organizado en tres secciones:

En la primera sección se plantean los problemas de Stefan que están motivados por el modelado de un sistema de regulación de temperatura en medios isotrópicos en el cual el término fuente describe un efecto de enfriamiento o calentamiento.

En la segunda sección se obtiene existencia y unicidad de un problema de Stefan donde se considera el término fuente de calor de tipo similaridad y se estudia un caso particular.

Por último, en la tercera sección, se prueba existencia y unicidad de solución de un problema de Stefan con una fuente de calor que depende de la evolución del flujo de calor en el borde fijo  $x = 0$ .

### 3.1. Problemas de Stefan con fuentes de calor y coeficientes térmicos dependientes de la temperatura

Se considera un problema de Stefan unidimensional a una fase para la fusión de un material semi-infinito  $x > 0$  donde se impone una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo  $x = 0$  y se describe por una ecuación de calor no clásica y no lineal en la que se asumen dos tipos de fuentes de calor  $F$  con conductividad térmica  $k = k(T)$  y el calor específico  $c = c(T)$ ,

dependientes de la temperatura  $T = T(x, t)$  dados de la siguiente manera:

$$k(T) = k_0 \left( 1 + \delta \left( \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} \right)^p \right), \quad (3.1)$$

$$c(T) = c_0 \left( 1 + \delta \left( \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} \right)^p \right), \quad (3.2)$$

donde  $\delta$  y  $p$  son constantes no negativas,  $k_0 = k(T_f)$  y  $c_0 = c(T_f)$  son los coeficientes de referencia de la conductividad térmica y el calor específico, respectivamente, la constante  $T_0$  es la temperatura impuesta en el borde fijo y  $T_f < T_0$  es la temperatura de cambio de fase en la frontera libre desconocida  $x = s(t)$ , que separa la fase líquida a temperatura  $T = T(x, t)$  de la fase sólida a temperatura constante  $T_f$ .

El modelo matemático que gobierna el proceso de cambio de fase (proceso de fusión) se describe a continuación:

$$\rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - F, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (3.3)$$

$$T(0, t) = T_0 > T_f \quad t > 0, \quad (3.4)$$

$$T(s(t), t) = T_f, \quad t > 0, \quad (3.5)$$

$$k_0 \frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) = -\rho \ell \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (3.6)$$

$$s(0) = 0, \quad (3.7)$$

donde las constantes:  $\rho > 0$  es la densidad y  $\ell > 0$  es el calor latente por unidad de masa.

Se consideran dos funciones de control  $F$  diferentes, la primera se define como en [51] y la segunda depende de la evolución del flujo de calor en el borde fijo  $x = 0$  como en [47]. En este último caso, se tiene una ecuación de calor no clásica como en [186, 190].

Notar que la existencia y unicidad del problema definido por (3.3)-(3.7) sin término fuente, es decir con  $F \equiv 0$ , fue desarrollada en el Capítulo 2 de esta Tesis [22].

El primer problema de Stefan que se considera está definido por (3.3)-(3.7) considerando la función de control dada por [172]:

$$F = F_1(x, t) = \frac{\rho \ell}{t} \beta \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (3.8)$$

donde  $\beta = \beta(\eta)$  es una función con propiedades de regularidad apropiadas [51, 172]. Además, se estudia un caso particular donde  $\beta$  es de tipo exponencial:

$$\beta(\eta) = \frac{1}{2} \exp(-\eta^2), \quad \eta > 0, \quad (3.9)$$

cuya importancia radica en que es un término de fuente de calor en el uso de energía de microondas [172].

Por último, se estudia el problema de Stefan definido por (3.3)-(3.7) en el que se considera la función de control dada por:

$$F = F_2 \left( \frac{\partial T}{\partial x}(0, t), t \right) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{t}} \frac{\partial T}{\partial x}(0, t), \quad \lambda_0 > 0, \quad t > 0, \quad (3.10)$$

cuyo término fuente es no uniforme y proporciona un efecto de enfriamiento o calentamiento dependiendo de las propiedades de  $F_2$  relacionadas con el flujo de calor (o la temperatura en otros casos) en el borde fijo  $x = 0$ .

Se desea obtener una solución de tipo similaridad al problema (3.3)-(3.7) mediante la siguiente transformación:

$$y(\eta) = \frac{T(x, t) - T_f}{T_0 - T_f}, \quad (3.11)$$

donde la variable de similaridad  $\eta$  está definida por:

$$\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}}, \quad (3.12)$$

y la frontera libre es de la forma

$$s(t) = 2a\lambda\sqrt{t}, \quad t > 0, \quad (3.13)$$

donde  $a^2 = \frac{k_0}{\rho c_0}$  es una difusividad térmica de referencia siendo  $\lambda > 0$  un parámetro a determinar.

## 3.2. Existencia y unicidad de solución del problema de Stefan con término fuente de calor de tipo similaridad

### 3.2.1. Caso General

En esta sección, se obtiene la solución exacta del problema de Stefan dado por (3.3)-(3.7) en donde se considera la función de control  $F$  dada por (3.8) y se supone la siguiente hipótesis sobre la función  $\beta$ :

$$H_\beta: \beta = \beta(\eta) \in C(\mathbb{R}^+) \text{ es tal que } \beta(\cdot) \exp(\cdot^2) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+).$$

Siguiendo el método clásico de Neumann, se propone una solución de tipo similaridad  $(T, s)$  al problema no clásico de Stefan (3.3)-(3.7) y se obtiene una equivalencia entre este problema y un problema diferencial ordinario de segundo orden:

**Teorema 3.1.** Sean  $p \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $y \in C^2(0, \lambda)$  y  $y \geq 0$ . El problema de Stefan definido por (3.3)-(3.7) tiene una solución de tipo similaridad  $(T, s)$  dada por

$$T(x, t) = (T_0 - T_f) y\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + T_f, \quad 0 \leq x \leq s(t), \quad t > 0, \quad (3.14)$$

$$s(t) = 2a\lambda\sqrt{t}, \quad t \geq 0, \quad (3.15)$$

si y solo si  $(y, \lambda)$  es una solución del problema diferencial ordinario definido por

$$2\eta(1 + \delta y^p(\eta))y'(\eta) + [(1 + \delta y^p(\eta))y'(\eta)]' = \frac{4}{\text{Ste}}\beta(\eta), \quad 0 < \eta < \lambda, \quad (3.16)$$

$$y(0) = 1, \quad (3.17)$$

$$y(\lambda) = 0, \quad (3.18)$$

$$y'(\lambda) = -\frac{2\lambda}{\text{Ste}}, \quad (3.19)$$

donde  $\text{Ste} = \frac{c_0(T_0 - T_f)}{\ell} > 0$  es el número de Stefan.

*Demostración.* Sea  $(T, s)$  dado por (3.14)-(3.15) una solución del problema de Stefan (3.3)-(3.7). Teniendo en cuenta la variable de similaridad  $\eta$  dada por (3.12) se tiene:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = -\frac{1}{2t}(T_0 - T_f)\eta y'(\eta), \quad \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{t}}(T_0 - T_f)y'(\eta), \quad (3.20)$$

y reemplazando estas expresiones en la ecuación (3.3), se obtiene que la función  $y = y(\eta)$  debe satisfacer la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$2\eta(1 + \delta y^p(\eta))y'(\eta) + [(1 + \delta y^p(\eta))y'(\eta)]' = \frac{4}{\text{Ste}}\beta(\eta), \quad 0 < \eta < \lambda,$$

es decir, (3.16).

Además, la condición (3.4) implica que

$$T(0, t) = (T_0 - T_f)y(0) + T_f = T_0,$$

resultando la condición (3.17) para la función  $y$ .

De manera similar, teniendo en cuenta que  $s$  está dada por (3.15), se obtiene de la condición (3.5) que

$$T(s(t), t) = (T_0 - T_f)y(\lambda) + T_f = T_f,$$

y, por lo tanto, la función  $y$  satisface la condición (3.18).

Finalmente, la condición de Stefan (3.6) es equivalente a

$$\frac{k_0}{2a\sqrt{t}}(T_0 - T_f)y'(\lambda) = -\rho\ell\frac{a\lambda}{\sqrt{t}},$$

y teniendo en cuenta las definiciones de los parámetros  $a$  y  $\text{Ste}$ , se obtiene que la función  $y$  satisface la condición (3.19).

Por lo tanto,  $(y, \lambda)$  es una solución del problema diferencial ordinario de segundo orden definido por (3.16)-(3.19).

Recíprocamente, si  $(y, \lambda)$  es una solución del problema (3.16)-(3.19), mediante el cambio de variable (3.11)-(3.12), de la condición (3.17) se obtiene (3.4), de la condición (3.18) se obtiene (3.5) y la frontera libre  $x = s(t)$  está dada por (3.15), verificándose (3.7). De (3.19) y teniendo en cuenta (3.20), se obtiene la condición de Stefan (3.6). Por último, teniendo en cuenta (3.20),  $T = T(x, t)$  está dada por (3.14) y satisface la ecuación (3.3). Así,  $(T, s)$  dada por (3.14)-(3.15), verifica el problema de Stefan (3.3)-(3.7). ■

En el siguiente lema se prueba la equivalencia entre el problema diferencial ordinario definido por (3.16)-(3.19) y un problema funcional:

**Lema 3.1.** Sean  $p \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $y \in C^2(0, \lambda)$ ,  $y \geq 0$ ,  $y \beta = \beta(\eta)$  una función tal que verifica la hipótesis  $H_\beta$ .

Entonces,  $(y, \lambda)$  es una solución del problema diferencial ordinario (3.16)-(3.19) si y solo si  $\lambda > 0$  es una solución de la ecuación:

$$\varphi_1(z) = 1 + \frac{\delta}{p+1}, \quad z > 0, \quad (3.21)$$

y la función  $y = y(\eta)$  satisface la ecuación funcional:

$$\Phi(y(\eta)) = \Psi_1(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq \lambda, \quad (3.22)$$

donde

$$\varphi_1(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\text{Ste}} z \operatorname{erf}(z) \exp(z^2) + \frac{2\sqrt{\pi}}{\text{Ste}} \int_0^z \exp(\xi^2) \operatorname{erf}(\xi) \beta(\xi) d\xi, \quad z \geq 0, \quad (3.23)$$

$$\Phi(z) = z + \frac{\delta}{p+1} z^{p+1}, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(z) = & 1 + \frac{\delta}{p+1} - \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(z)}{\text{Ste}} \left( 2 \int_0^\lambda \beta(\xi) \exp(\xi^2) d\xi + \lambda \exp(\lambda^2) \right) + \\ & + \frac{2\sqrt{\pi}}{\text{Ste}} \left( \int_0^z \beta(\xi) \exp(\xi^2) (\operatorname{erf}(z) - \operatorname{erf}(\xi)) d\xi \right), \quad 0 \leq z \leq \lambda. \end{aligned} \quad (3.25)$$

*Demostración.* Sea  $(y, \lambda)$  una solución de (3.16)-(3.19). Definiendo:

$$v(\eta) = (1 + \delta y^p(\eta)) y'(\eta), \quad (3.26)$$

la ecuación diferencial ordinaria (3.16) es equivalente a

$$v'(\eta) + 2\eta v(\eta) = \frac{4}{\text{Ste}} \beta(\eta),$$

e integrando entre  $\eta$  y  $\lambda$ , y teniendo en cuenta las condiciones (3.18) y (3.19), resulta:

$$v(\eta) = -\exp(-\eta^2) \left( \frac{4}{\text{Ste}} \int_\eta^\lambda \beta(\xi) \exp(\xi^2) d\xi + \frac{2\lambda}{\text{Ste}} \exp(\lambda^2) \right). \quad (3.27)$$

Por lo tanto, de (3.26) y (3.27):

$$(1 + \delta y^p(\eta)) y'(\eta) = -\exp(-\eta^2) \left( \frac{4}{\text{Ste}} \int_\eta^\lambda \beta(\xi) \exp(\xi^2) d\xi + \frac{2\lambda}{\text{Ste}} \exp(\lambda^2) \right). \quad (3.28)$$

Si se integra (3.28) entre 0 y  $\eta$ , y en virtud de (3.17), se obtiene

$$\begin{aligned} y(\eta) \left( 1 + \frac{\delta}{p+1} y^p(\eta) \right) = & 1 + \frac{\delta}{p+1} - \frac{\sqrt{\pi}}{\text{Ste}} \lambda \exp(\lambda^2) \operatorname{erf}(\eta) + \\ & - \frac{4}{\text{Ste}} \int_0^\eta \int_r^\lambda \beta(\xi) \exp(-r^2) \exp(\xi^2) d\xi dr. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Dado que

$$\begin{aligned} \int_0^\eta \int_r^\lambda \beta(\xi) \exp(-r^2) \exp(\xi^2) d\xi dr &= \int_0^\eta \int_0^\xi \beta(\xi) \exp(-r^2) \exp(\xi^2) dr d\xi + \\ &+ \int_\eta^\lambda \int_0^\eta \beta(\xi) \exp(-r^2) \exp(\xi^2) dr d\xi \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\eta \operatorname{erf}(\xi) \beta(\xi) \exp(\xi^2) d\xi + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\eta) \int_\eta^\lambda \beta(\xi) \exp(\xi^2) d\xi \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\eta (\operatorname{erf}(\xi) - \operatorname{erf}(\eta)) \beta(\xi) \exp(\xi^2) d\xi + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\eta) \int_0^\lambda \beta(\xi) \exp(\xi^2) d\xi, \end{aligned}$$

resulta

$$y(\eta) \left( 1 + \frac{\delta}{p+1} y^p(\eta) \right) = 1 + \frac{\delta}{p+1} - \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\eta)}{\operatorname{Ste}} \left( 2 \int_0^\lambda \beta(\xi) \exp(\xi^2) d\xi + \lambda \exp(\lambda^2) \right) + \frac{2\sqrt{\pi}}{\operatorname{Ste}} \int_0^\eta (\operatorname{erf}(\eta) - \operatorname{erf}(\xi)) \beta(\xi) \exp(\xi^2) d\xi, \quad 0 \leq \eta \leq \lambda, \quad (3.30)$$

es decir, la función  $y = y(\eta)$  satisface la ecuación funcional (3.22).

Al tomar  $\eta = \lambda$  en la ecuación (3.30) y usando (3.18), se concluye que  $\lambda > 0$  satisface la ecuación (3.21).

Por lo tanto,  $(y, \lambda)$  es una solución del problema funcional (3.21)-(3.25).

Recíprocamente, si  $(y, \lambda)$  es una solución del problema funcional (3.21)-(3.25), entonces

$$y(\eta) = 1 + \frac{\delta}{p+1} - \frac{\delta}{p+1} y^{p+1}(\eta) - \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\eta)}{\operatorname{Ste}} \left( 2 \int_0^\lambda \beta(\xi) \exp(\xi^2) d\xi + \lambda \exp(\lambda^2) \right) + \frac{2\sqrt{\pi}}{\operatorname{Ste}} \left( \int_0^\eta \beta(\xi) \exp(\xi^2) (\operatorname{erf}(\eta) - \operatorname{erf}(\xi)) d\xi \right), \quad 0 \leq \eta \leq \lambda. \quad (3.31)$$

Si se deriva la expresión anterior respecto de  $\eta$  se obtiene:

$$y'(\eta) + \delta y^p(\eta) y'(\eta) = - \frac{2 \exp(-\eta^2)}{\operatorname{Ste}} \left( 2 \int_0^\lambda \beta(\xi) \exp(\xi^2) d\xi + \lambda \exp(\lambda^2) \right) + \frac{4}{\operatorname{Ste}} \exp(-\eta^2) \int_0^\eta \beta(\xi) \exp(\xi^2) d\xi, \quad (3.32)$$

y al derivar esta última respecto de  $\eta$  resulta:

$$[(1 + \delta y^p(\eta)) y'(\eta)]' = \frac{4}{\operatorname{Ste}} \eta \exp(-\eta^2) \left( 2 \int_0^\lambda \beta(\xi) \exp(\xi^2) d\xi + \lambda \exp(\lambda^2) \right) - \frac{8}{\operatorname{Ste}} \eta \exp(-\eta^2) \int_0^\eta \beta(\xi) \exp(\xi^2) d\xi + \frac{4}{\operatorname{Ste}} \beta(\eta),$$

que teniendo en cuenta (3.32) en la expresión anterior se obtiene la ecuación (3.16).

De (3.31), tomando  $\eta = 0$  se obtiene:

$$y(0) + \frac{\delta}{p+1} y^{p+1}(0) = 1 + \frac{\delta}{p+1},$$

de la cual necesariamente  $y(0) = 1$ , es decir (3.17), ya que en cualquier otro caso se llega a una contradicción.

Si en (3.31), se toma  $\eta = \lambda$  se tiene:

$$y(\lambda) \left( 1 + \frac{\delta}{p+1} y^p(\lambda) \right) = 1 + \frac{\delta}{p+1} - \varphi_1(\lambda),$$

y como  $\lambda$  es una solución de (3.21), la expresión anterior se verifica si  $y(\lambda) = 0$ , esto es, la condición (3.18).

Por último, tomando  $\eta = \lambda$  en (3.32) y teniendo en cuenta que  $y(\lambda) = 0$  se tiene la condición (3.19).

Por lo tanto,  $(y, \lambda)$  es una solución del problema diferencial ordinario (3.16)-(3.19). ■

Se probará ahora que el problema funcional definido por (3.21)-(3.25) tiene una única solución  $(y, \lambda)$ .

**Lema 3.2.** *Si  $p \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$  y  $\beta = \beta(\eta) \geq 0$  verifica la hipótesis  $H_\beta$ , entonces existe una única solución  $(y, \lambda)$  del problema funcional definido por (3.21)-(3.25) con  $\lambda > 0$ ,  $y \in C^2(0, \lambda)$  y  $y \geq 0$ .*

*Demostración.* La función  $\varphi_1 = \varphi_1(z)$  dada en (3.23) verifica:  $\varphi_1(0) = 0$ ,  $\varphi_1(+\infty) = +\infty$  y  $\varphi'(z) > 0$  para todo  $z > 0$  por lo que  $\varphi_1$  es una función creciente en  $[0, +\infty)$ . Entonces, existe una única solución  $\lambda > 0$  de la ecuación (3.21).

Por un lado, la función  $\Phi = \Phi(z)$  definida en (3.24) verifica que  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi(1) = 1 + \frac{\delta}{p+1}$  y  $\Phi'(z) > 0$  en  $(0, 1)$  por lo que  $\Phi$  es función creciente en  $[0, 1]$ . Entonces, es posible definir la función  $\Phi^{-1} : [0, 1 + \frac{\delta}{p+1}] \rightarrow [0, 1]$ .

Por otro lado, la función  $\Psi_1 = \Psi_1(z)$  dada por (3.25) satisface que  $\Psi_1(0) = 1 + \frac{\delta}{p+1}$ ,  $\Psi_1(\lambda) = 0$  y  $\Psi_1'(z) < 0$  en  $(0, \lambda)$  por lo que  $\Psi$  es una función decreciente en  $[0, \lambda]$ . Luego,  $\Psi_1(z) \in \left[0, 1 + \frac{\delta}{p+1}\right]$  para todo  $z \in [0, \lambda]$ .

Así, se concluye que existe una única función  $y \in C^2(0, \lambda)$  solución de la ecuación (3.22) dada por

$$y(\eta) = \Phi^{-1}(\Psi_1(\eta)), \quad 0 \leq \eta \leq \lambda. \quad (3.33)$$

■

De los resultados obtenidos, se tiene entonces:

**Teorema 3.2.** *Sean  $p \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$  y  $\beta = \beta(\eta)$  una función tal que verifica la hipótesis  $H_\beta$ . El problema de Stefan definido por (3.3)-(3.7) tiene una única solución de tipo similaridad  $(T, s)$  dada por (3.14)-(3.15) donde  $(y, \lambda)$  es la única solución del problema funcional definido por (3.21)-(3.25) donde  $\lambda > 0$ ,  $y \in C^2(0, \lambda)$ ,  $y \geq 0$ .*

*Demostración.* Surge de la equivalencia entre el problema de Stefan (3.3)-(3.7) con el problema diferencial ordinario (3.16)-(3.19) establecida en el Teorema 3.1, de la equivalencia entre el problema diferencial ordinario (3.16)-(3.19) con el problema funcional (3.21)-(3.25) que se prueba en el Lema 3.1 y de la unicidad de solución del problema funcional (3.21)-(3.25) que se demuestra en el Lema 3.2. ■

**Observación 3.1.** *Por un lado se tiene que la función  $\Psi_1$  dada por (3.25) es una función decreciente en  $[0, \lambda]$  con  $\Psi_1(0) = 1 + \frac{\delta}{p+1}$  y  $\Psi_1(\lambda) = 0$ .*

*Por otro lado, la función  $\Phi$  definida en (3.24) es una función creciente en  $[0, 1]$  con  $\Phi(0) = 0$  y  $\Phi(1) = 1 + \frac{\delta}{p+1}$ . Entonces, de (3.33), sigue que*

$$0 \leq y(\eta) \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq \lambda,$$

*y en virtud del Teorema 3.2 se tiene, como era de esperar, que:*

$$T_f \leq T(x, t) \leq T_0, \quad 0 \leq x \leq s(t), \quad t \geq 0.$$



### 3.2.2. Caso particular

Ahora, se considerará un caso particular del problema (3.3)-(3.7), donde la función  $\beta$  es de tipo exponencial y está dada por:

$$\beta(\eta) = \frac{1}{2} \exp(-\eta^2), \quad \eta > 0.$$

Como la función  $\beta$  satisface la hipótesis  $H_\beta$ , se tiene inmediatamente el siguiente resultado:

**Corolario 3.1.** *Si  $p \geq 0$  y  $\delta \geq 0$ , entonces el problema de Stefan definido por (3.3)-(3.7) tiene una única solución de tipo similaridad  $(T, s)$  dada por (3.14)-(3.15) donde  $\lambda > 0$  es la única solución de la ecuación:*

$$\mathcal{Z}(z) = \frac{\delta}{p+1}, \quad z > 0, \quad (3.34)$$

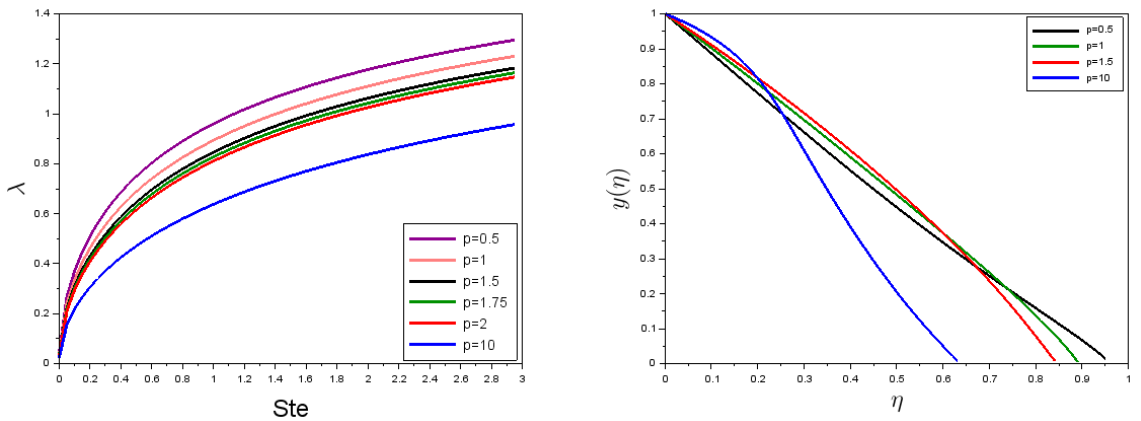
con

$$\mathcal{Z}(z) = \frac{1}{\text{Ste}} (\exp(-z^2) - 1) + \frac{\sqrt{\pi}}{\text{Ste}} z \operatorname{erf}(z) (\exp(z^2) + 1) - 1, \quad z \geq 0, \quad (3.35)$$

y la función  $y \in C^2(0, \lambda)$ ,  $y \geq 0$  satisface la ecuación

$$y(\eta) \left( 1 + \frac{\delta}{p+1} y^p(\eta) \right) = 1 + \frac{\delta}{p+1} + \frac{1}{\text{Ste}} (1 - \exp(-\eta^2)) - \frac{\sqrt{\pi}}{\text{Ste}} \lambda \operatorname{erf}(\eta) (1 + \exp(\lambda^2)), \quad 0 \leq \eta \leq \lambda. \quad (3.36)$$

En la Figura 3.1a, se grafica la solución  $\lambda$  de la ecuación (3.34) para diferentes valores de Ste y  $p$ , asumiendo  $\delta = 5$ . Además en la Figura 3.1b, se grafica la solución  $y = y(\eta)$  de la ecuación (3.36) para diferentes valores de  $p$ , asumiendo  $\delta = 5$  y Ste = 1.



(a) Coeficiente  $\lambda$  en función de Ste para  $\delta = 5$       (b) Función  $y = y(\eta)$  para Ste = 1,  $\delta = 5$

Figura 3.1: Gráficas del coeficiente  $\lambda$  y de la función  $y = y(\eta)$ .

**Observación 3.2.** Para el caso particular  $p = 1$ , es decir, la conductividad térmica y el calor específico lineales respecto a la temperatura  $T = T(x, t)$ :

$$k(T) = k_0 \left( 1 + \delta \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} \right), \quad c(T) = c_0 \left( 1 + \delta \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} \right),$$

respectivamente, se tiene que la única función  $y = y(\eta)$  solución de la ecuación (3.36) viene dada por:

$$y(\eta) = \frac{1}{\delta} \left[ \sqrt{1 + 2\delta \left( 1 + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{\text{Ste}} (1 - \exp(-\eta^2)) - \frac{\sqrt{\pi}}{\text{Ste}} \lambda \operatorname{erf}(\eta) (1 + \exp(\lambda^2)) - 1 \right)} - 1 \right],$$

con  $0 \leq \eta \leq \lambda$ , donde  $\lambda > 0$  es la única solución de la ecuación (3.34) para  $p = 1$ , es decir,

$$\frac{1}{\text{Ste}} (\exp(-z^2) - 1) + \frac{\sqrt{\pi}}{\text{Ste}} z \operatorname{erf}(z) (\exp(z^2) + 1) = 1 + \frac{\delta}{2}.$$

**Lema 3.3.** Para un  $p \geq 0$  fijo, se define  $\lambda_p$  como la única solución a la ecuación (3.34). Entonces se cumplen las siguientes estimaciones:

$$0 < \lambda_1 - \lambda_p = \mathcal{O}(p - 1) \quad \text{cuando } p \rightarrow 1^+. \quad (3.37)$$

$$0 < \lambda_p - \lambda_1 = \mathcal{O}(1 - p) \quad \text{cuando } p \rightarrow 1^-. \quad (3.38)$$

*Demostración.* Para probar (3.37), se considera el triángulo con vértices  $P_0(\lambda_p, \mathcal{Z}(\lambda_p))$ ,  $P_1(\lambda_1, \mathcal{Z}(\lambda_p))$  y  $P_2(\lambda_1, \mathcal{Z}(\lambda_1))$  donde  $\mathcal{Z}$  es la función dada por (3.35). Teniendo en cuenta que  $p > 1$ , si  $\alpha_p = P_1 \hat{P}_0 P_2$  entonces

$$0 < \lambda_1 - \lambda_p = \frac{\delta(p-1)}{2(1+p)} \frac{1}{\tan(\alpha_p)}.$$

La función  $\mathcal{Z}$  es convexa, creciente, y satisface  $\mathcal{Z}(0) = -1$ ,  $\mathcal{Z}(+\infty) = +\infty$ . Si se denota con  $r > 0$  a la única raíz de  $\mathcal{Z}$ , entonces  $0 < \mathcal{Z}'(r) < \mathcal{Z}'(\lambda_p) < \tan(\alpha_p)$ .

Como consecuencia se obtiene:

$$0 < \lambda_1 - \lambda_p < \frac{\delta}{4\mathcal{Z}'(r)}(p - 1).$$

La estimación (3.38) se prueba de manera similar. ■

### 3.3. Existencia y unicidad de solución del problema de Stefan con una fuente de calor que depende de la evolución del flujo de calor en el borde fijo

En esta sección se prueba la existencia de única solución del problema de Stefan dado por (3.3)-(3.7), donde se considera que la función de control  $F$  depende de la evolución del flujo en el borde fijo  $x = 0$ , es decir

$$F = F_2 \left( \frac{\partial T}{\partial x}(0, t), t \right) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{t}} \frac{\partial T}{\partial x}(0, t), \quad \lambda_0 > 0, \quad t > 0.$$

De manera similar a lo probado en el Teorema 3.1, si se sigue el método clásico de Neumann y se propone una solución de tipo similaridad  $(T, s)$  al problema no clásico de Stefan (3.3)-(3.7), mediante la transformación (3.11) donde  $\eta$  es la variable de similaridad dada por (3.12), entonces se obtiene una equivalencia entre este problema y un problema diferencial ordinario de segundo orden:

**Teorema 3.3.** Sean  $p \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $y \in C^2(0, \lambda)$  y  $y \geq 0$ . El problema de Stefan definido por (3.3)-(3.7) tiene una solución de tipo similaridad  $(T, s)$  dada por

$$T(x, t) = (T_0 - T_f) y \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) + T_f, \quad 0 \leq x \leq s(t), \quad t > 0, \quad (3.39)$$

$$s(t) = 2a\lambda\sqrt{t}, \quad t \geq 0, \quad (3.40)$$

si y solo si la función  $y = y(\eta)$  y el parámetro  $\lambda > 0$  satisfacen el siguiente problema diferencial ordinario de segundo orden:

$$2\eta(1 + \delta y^p(\eta))y'(\eta) + [(1 + \delta y^p(\eta))y'(\eta)]' = Ay'(0), \quad 0 < \eta < \lambda, \quad (3.41)$$

$$y(0) = 1, \quad (3.42)$$

$$y(\lambda) = 0, \quad (3.43)$$

$$y'(\lambda) = -\frac{2\lambda}{\text{Ste}}, \quad (3.44)$$

donde  $A = \frac{2\lambda_0}{\rho c_0 a} > 0$  y  $\text{Ste} = \frac{c_0(T_0 - T_f)}{\ell} > 0$  es el número de Stefan.

Se probará en el siguiente lema que el problema diferencial ordinario de segundo orden dado por (3.41)-(3.44) es equivalente a un problema funcional:

**Lema 3.4.** Sean  $p \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $y \in C^2(0, \lambda)$  y  $y \geq 0$ . Entonces,  $(y, \lambda)$  es una solución del problema diferencial ordinario (3.41)-(3.44) si y solo si  $\lambda$  es una solución de la ecuación:

$$\varphi_2(z) = 1 + \frac{\delta}{p+1}, \quad z > 0, \quad (3.45)$$

y la función  $y = y(\eta)$  satisface la ecuación:

$$\Phi(y(\eta)) = \Psi_2(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq \lambda, \quad (3.46)$$

donde  $\Phi$  está dada por (3.24) y

$$\varphi_2(z) = \frac{\sqrt{\pi}z \exp(z^2)}{\text{Ste} \left( A \int_0^z \exp(\xi^2) d\xi + 1 + \delta \right)} \mu(z), \quad z \geq 0, \quad (3.47)$$

$$\Psi_2(z) = 1 + \frac{\delta}{p+1} - \frac{\sqrt{\pi}\lambda \exp(\lambda^2)}{\text{Ste} \left( A \int_0^\lambda \exp(\xi^2) d\xi + 1 + \delta \right)} \mu(z), \quad 0 \leq z \leq \lambda, \quad (3.48)$$

con

$$\mu(z) = (1 + \delta) \text{erf}(z) + A \int_0^z \exp(\xi^2) (\text{erf}(z) - \text{erf}(\xi)) d\xi, \quad z \geq 0. \quad (3.49)$$

*Demostración.* La prueba es similar a la del Lema 3.1. Sea  $(y, \lambda)$  una solución del problema diferencial ordinario (3.41)-(3.44).

Llamando  $v(\eta) = (1 + \delta y^p(\eta)) y'(\eta)$ , de la ecuación diferencial ordinaria (3.41), resulta que  $v = v(\eta)$  satisface

$$v'(\eta) + 2\eta v(\eta) = Ay'(0),$$

y teniendo en cuenta la condición (3.42), la función  $v$  puede reescribirse como:

$$v(\eta) = \exp(-\eta^2) y'(0) \left( A \int_0^\eta \exp(\xi^2) d\xi + 1 + \delta \right).$$

Por lo tanto:

$$(1 + \delta y^p(\eta)) y'(\eta) = \exp(-\eta^2) y'(0) \left( A \int_0^\eta \exp(\xi^2) d\xi + 1 + \delta \right). \quad (3.50)$$

Al tomar  $\eta = \lambda$  en la ecuación anterior y usando las condiciones (3.43) y (3.44), se obtiene:

$$y'(0) = -\frac{2\lambda \exp(\lambda^2)}{\text{Ste} \left( A \int_0^\lambda \exp(\xi^2) d\xi + 1 + \delta \right)}. \quad (3.51)$$

Si se integra la ecuación (3.50) en  $(0, \eta)$  y en virtud de (3.42), se obtiene:

$$\begin{aligned} y(\eta) \left( 1 + \frac{\delta}{p+1} y^p(\eta) \right) &= 1 + \frac{\delta}{p+1} + (1 + \delta) y'(0) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{erf}(\eta) + \\ &+ Ay'(0) \int_0^\eta \int_\xi^\eta \exp(-r^2) \exp(\xi^2) dr d\xi. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Dado que

$$\int_0^\eta \int_\xi^\eta \exp(-r^2) \exp(\xi^2) dr d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\eta (\text{erf}(\eta) - \text{erf}(\xi)) \exp(\xi^2) d\xi,$$

y del valor de  $y'(0)$  obtenido en (3.51), resulta

$$\begin{aligned} y(\eta) \left( 1 + \frac{\delta}{p+1} y^p(\eta) \right) &= 1 + \frac{\delta}{p+1} - \frac{\sqrt{\pi} \lambda \exp(\lambda^2)}{\text{Ste} \left( A \int_0^\lambda \exp(\xi^2) d\xi + 1 + \delta \right)} [(1 + \delta) \text{erf}(\eta) + \\ &+ A \int_0^\eta (\text{erf}(\eta) - \text{erf}(\xi)) \exp(\xi^2) d\xi], \quad 0 \leq \eta \leq \lambda, \end{aligned} \quad (3.53)$$

es decir, la función  $y = y(\eta)$  satisface (3.46).

Al tomar  $\eta = \lambda$  en la ecuación anterior y usando la condición (3.43), se concluye que  $\lambda > 0$  es una solución de la ecuación (3.45).

Por lo tanto,  $(y, \lambda)$  es una solución del problema funcional definido por (3.45)-(3.49).

Recíprocamente, si  $(y, \lambda)$  es una solución del problema funcional (3.45)-(3.49), se tiene que:

$$y(\eta) = 1 + \frac{\delta}{p+1} - \frac{\delta}{p+1} y^{p+1}(\eta) - \frac{\sqrt{\pi} \lambda \exp(\lambda^2)}{\text{Ste} \left( A \int_0^\lambda \exp(\xi^2) d\xi + 1 + \delta \right)} \mu(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq \lambda. \quad (3.54)$$

Tomando  $\eta = 0$  en la expresión anterior se obtiene:

$$y(0) + \frac{\delta}{p+1}y^{p+1}(0) = 1 + \frac{\delta}{p+1},$$

de la cual necesariamente  $y(0) = 1$ , es decir (3.42), ya que en cualquier otro caso se llega a una contradicción.

De (3.54), tomando  $\eta = \lambda$  se tiene que:

$$y(\lambda) = 1 + \frac{\delta}{p+1} - \frac{\delta}{p+1}y^{p+1}(\lambda) - \frac{\sqrt{\pi}\lambda \exp(\lambda^2)}{\text{Ste}\left(A \int_0^\lambda \exp(\xi^2) d\xi + 1 + \delta\right)}\mu(\lambda),$$

usando (3.47), se puede reescribir como

$$y(\lambda) \left(1 + \frac{\delta}{p+1}y^p(\lambda)\right) = 1 + \frac{\delta}{p+1} - \varphi_2(\lambda),$$

y dado que  $\lambda$  es una solución de (3.45), la expresión anterior se verifica si  $y(\lambda) = 0$ , esto es, la condición (3.43).

Si se deriva la expresión (3.54) respecto de  $\eta$  se tiene:

$$y'(\eta) = -\delta y^p(\eta)y'(\eta) - \frac{2\lambda \exp(\lambda^2) \exp(-\eta^2)}{\text{Ste}\left(A \int_0^\lambda \exp(\xi^2) d\xi + 1 + \delta\right)} \left(A \int_0^\eta \exp(\xi^2) d\xi + 1 + \delta\right), \quad (3.55)$$

al evaluarla en  $\eta = \lambda$  y del hecho que  $y(\lambda) = 0$ , se obtiene la condición (3.44).

Si en (3.55) se toma  $\eta = 0$  y como  $y(0) = 1$  se tiene que:

$$y'(0) = -\frac{2\lambda \exp(\lambda^2)}{\text{Ste}\left(A \int_0^\lambda \exp(\xi^2) d\xi + 1 + \delta\right)},$$

que al sustituir esta expresión en (3.55) resulta

$$y'(\eta) + \delta y^p(\eta)y'(\eta) = y'(0) \exp(-\eta^2) \left(A \int_0^\eta \exp(\xi^2) d\xi + 1 + \delta\right). \quad (3.56)$$

Al derivar esta última expresión con respecto a  $\eta$  se obtiene:

$$[y'(\eta) + \delta y^p(\eta)y'(\eta)]' = -2\eta y'(0) \exp(-\eta^2) \left(A \int_0^\eta \exp(\xi^2) d\xi + 1 + \delta\right) + Ay'(0),$$

y usando (3.56) se deduce que

$$[y'(\eta) + \delta y^p(\eta)y'(\eta)]' = -2\eta (y'(\eta) + \delta y^p(\eta)y'(\eta)) + Ay'(0),$$

esto es (3.41).

Así,  $(y, \lambda)$  es una solución del problema diferencial ordinario (3.41)-(3.44). ■

A continuación se demuestra que el problema funcional definido por (3.45)-(3.49) tiene una única solución  $(y, \lambda)$ .

**Lema 3.5.** Si  $p \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$ , entonces existe una única solución  $(y, \lambda)$  del problema funcional definido por (3.45)-(3.49) con  $\lambda > 0$ ,  $y \in C^2(0, \lambda)$  y  $y \geq 0$ .

*Demostración.* La función  $\varphi_2$  definida en (3.47) verifica que  $\varphi_2(0) = 0$ ,  $\varphi_2(+\infty) = +\infty$  y además  $\varphi_2'(z) > 0$  para todo  $z > 0$ , por lo que  $\varphi_2$  es una función creciente en  $[0, +\infty)$ . Entonces, existe una única solución  $\lambda > 0$  para la ecuación (3.45).

Sea  $\Phi$  la función dada por (3.24). Dado que  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi(1) = 1 + \frac{\delta}{p+1}$  y  $\Phi$  es una función creciente en  $[0, 1]$ , entonces existe la función  $\Phi^{-1} : [0, 1 + \frac{\delta}{p+1}] \rightarrow [0, 1]$ .

Por otro lado, la función  $\Psi_2 = \Psi_2(z)$  definida en (3.48) satisface que  $\Psi_2(0) = 1 + \frac{\delta}{p+1}$ ,  $\Psi_2(\lambda) = 0$ ,  $0 \leq \Psi_2(z) \leq \frac{\delta}{p+1}$  para todo  $z \in [0, \lambda]$  y  $\Psi_2'(z) < 0$  en  $(0, \lambda)$ , por lo que  $\Psi_2$  es una función decreciente en  $[0, \lambda]$ .

Así, se puede concluir que existe una única función  $y \in C^2(0, \lambda)$  solución a la ecuación (3.46) y está dada por:

$$y(\eta) = \Phi^{-1}(\Psi_2(\eta)), \quad 0 \leq \eta \leq \lambda. \quad (3.57)$$

■

De la equivalencia entre el problema de Stefan con el problema diferencial ordinario (Teorema 3.3), de la equivalencia entre el problema diferencial ordinario con el problema funcional (Lema 3.4) y de la unicidad de solución del problema funcional (Lema 3.5), se puede afirmar que:

**Teorema 3.4.** Sean  $p \geq 0$  y  $\delta \geq 0$ . El problema de Stefan definido por (3.3)-(3.7) tiene una única solución de tipo similaridad  $(T, s)$  dada por (3.39)-(3.40) donde  $(y, \lambda)$  es la única solución del problema funcional definido por (3.45)-(3.49) con  $\lambda > 0$ ,  $y \in C^2(0, \lambda)$  y  $y \geq 0$ .

**Observación 3.3.** Por un lado se tiene que la función  $\Psi_2 = \Psi_2(z)$  definida en (3.48) es una función decreciente en  $[0, \lambda]$  con  $\Psi_2(0) = 1 + \frac{\delta}{p+1}$  y  $\Psi_2(\lambda) = 0$ .

Por otro lado la función  $\Phi = \Phi(z)$  definida en (3.24) es una función creciente en  $[0, 1]$  con  $\Phi(0) = 0$  y  $\Phi(1) = 1 + \frac{\delta}{p+1}$ . Entonces se sigue que

$$0 \leq y(\eta) \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq \lambda,$$

y del Teorema 3.4 se obtiene, como era de esperar, que

$$T_f \leq T(x, t) \leq T_0, \quad 0 \leq x \leq s(t), \quad t \geq 0.$$

## Capítulo 4

# Soluciones exactas de problemas de Stefan a dos fases en un dominio angular con coeficientes térmicos variables

En este capítulo, motivado por [144, 196, 199], se consideran problemas de frontera libre unidimensionales a dos fases para el proceso de solidificación de un material semi-infinito  $x > 0$  en un dominio angular donde los coeficientes térmicos son variables y dependientes de la temperatura. La sustancia inicialmente se encuentra en estado líquido y cuando la temperatura está por encima de la temperatura de congelación se aplica un enfriamiento en  $x = 0$ . La temperatura del líquido en el momento inicial en  $x = 0$  desciende hasta el punto de congelación y comienza la solidificación, donde  $x = s(t)$  es la posición de la interfase. A medida que el líquido se solidifica, se encoge y aparece un dominio angular, es decir, una región vacía entre  $x = 0$  y  $x = rs(t)$  con

$$r = 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \in (0, 1), \quad (4.1)$$

donde  $\rho_i > 0$  es la densidad de la región  $i$  siendo  $i = 1$  la región sólida y  $i = 2$  la región líquida.

Este capítulo está organizado en dos secciones:

En la primera sección, se estudia la existencia y unicidad de la solución del problema de Stefan a dos fases en un dominio angular con una condición de tipo Dirichlet en el borde  $x = rs(t)$ . También, se demuestra la existencia de única solución del mismo problema de Stefan a dos fases pero imponiendo una condición de tipo Neumann en el borde  $x = rs(t)$ .

En la segunda sección, usando los resultados obtenidos en la sección anterior y motivado por [16, 68, 188], se impone al problema de Stefan a dos fases en el dominio angular con condición de tipo Dirichlet en  $x = rs(t)$ , una sobrecondición de tipo Neumann en el borde  $x = rs(t)$ . Esto permite determinar coeficientes desconocidos en el proceso de cambio de fase y obtener fórmulas para los mismos bajo ciertas condiciones necesarias y suficientes sobre los datos.

## 4.1. Problemas de Stefan a dos fases en un dominio angular con coeficientes térmicos dependientes de la temperatura

Se consideran dos tipos de problemas de Stefan unidimensionales a dos fases en un dominio angular para la solidificación de un material semi-infinito  $x > 0$ , que inicialmente se encuentra a temperatura  $B$ , con conductividad térmica  $k(T)$  y calor específico  $c(T)$  dependientes de la temperatura dados por:

$$k_i(T_i) = k_i^* \left[ 1 + \beta_i \left( \frac{T_i - B}{T_f - B} \right)^{p_i} \right], \quad (4.2)$$

$$c_i(T_i) = c_i^* \left[ 1 + \beta_i \left( \frac{T_i - B}{T_f - B} \right)^{p_i} \right], \quad (4.3)$$

donde  $T_1 = T_1(x, t)$  es la temperatura del sólido,  $T_2 = T_2(x, t)$  es la temperatura del líquido,  $\beta_i \geq 0$ ,  $p_i \geq 0$ ,  $k_i^* = k_i(T_f)$  es la conductividad térmica de referencia,  $c_i^* = c_i(T_f)$  es el calor específico de referencia, para  $i = 1, 2$  y  $T_f$  es la temperatura de congelación con  $B > T_f$ .

El problema de frontera libre a dos fases en un dominio angular con una condición de tipo Dirichlet en el borde  $x = rs(t)$  consiste en hallar la temperatura  $T$  dada por:

$$T(x, t) = \begin{cases} T_1(x, t) & \text{si } rs(t) < x < s(t), \quad t > 0, \\ T_f & \text{si } x = s(t), \quad t > 0, \\ T_2(x, t) & \text{si } x > s(t), \quad t > 0, \end{cases}$$

y la posición de la frontera libre  $x = s(t)$ ,  $t \geq 0$  tal que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) = \rho_1 c_1(T_1) \left( \frac{\partial T_1}{\partial t} + r \dot{s}(t) \frac{\partial T_1}{\partial x} \right), \quad rs(t) < x < s(t), \quad t > 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) = \rho_2 c_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial t}, \quad x > s(t), \quad t > 0, \quad (4.5)$$

$$T_2(+\infty, t) = T_2(x, 0) = B > T_f, \quad x > s(t), \quad (4.6)$$

$$T_1(s(t), t) = T_2(s(t), t) = T_f, \quad t > 0, \quad (4.7)$$

$$k_1^* \frac{\partial T_1}{\partial x}(s(t), t) - k_2^* \frac{\partial T_2}{\partial x}(s(t), t) = \rho_1 \ell \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (4.8)$$

$$s(0) = 0, \quad (4.9)$$

$$T_1(rs(t), t) = A < T_f, \quad t > 0, \quad (4.10)$$

donde  $\ell > 0$  es el calor latente de fusión por unidad de masa constante y común a ambas fases y  $A < T_f$  es la temperatura en el borde  $x = rs(t)$ . La difusividad térmica de referencia del sólido y del líquido está dada por  $\alpha_i = a_i^2 = \frac{k_i^*}{\rho_i c_i^*}$ ,  $i = 1, 2$ , respectivamente.

También, se considera el problema de frontera libre unidimensional a dos fases en un dominio angular imponiendo una condición de tipo Neumann en el borde  $x = rs(t)$ . Más



precisamente, se considera el problema de Stefan a dos fases en un dominio angular que está gobernado por las ecuaciones (4.4)-(4.5), las condiciones (4.6)-(4.9) y la condición

$$k_1(T_1(rs(t), t)) \frac{\partial T_1}{\partial x}(rs(t), t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}}, \quad q_0 > 0, \quad t > 0, \quad (4.11)$$

en lugar de la condición (4.10) del problema (4.4)-(4.10).

En la Figura 4.1 se representa el dominio angular en el plano  $x, t$  correspondiente al problema de Stefan a dos fases (4.4)-(4.10).

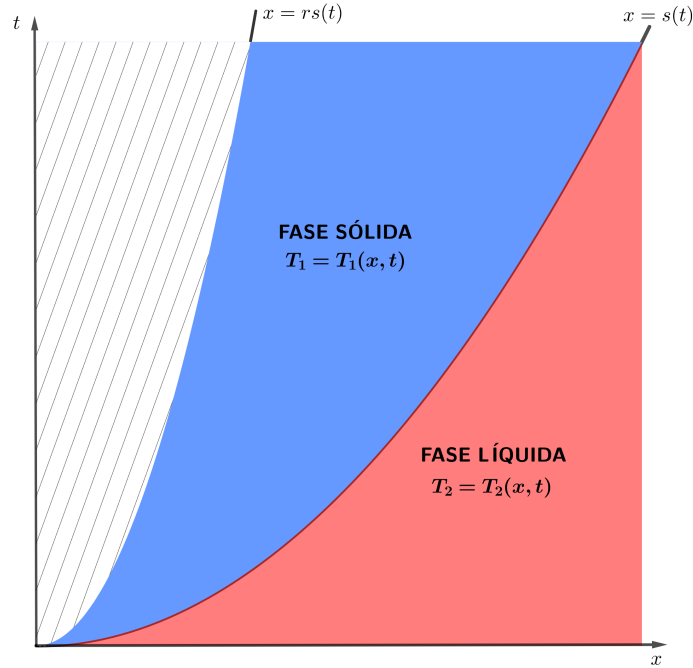


Figura 4.1: Representación del dominio angular en el plano  $x, t$ .

#### 4.1.1. Existencia y unicidad de solución del problema de frontera libre a dos fases con una condición tipo Dirichlet

En esta sección se prueba la existencia y unicidad de solución de tipo similaridad del problema de frontera libre a dos fases en un dominio angular con contracción en el que se impone una condición de tipo Dirichlet en  $x = rs(t)$  definido por (4.4)-(4.10), donde las temperaturas  $T_1 = T_1(x, t)$  y  $T_2 = T_2(x, t)$  dependen de la variable de similaridad dada por

$$\eta = \frac{x}{2\lambda\sqrt{\alpha_2 t}}, \quad (4.12)$$

donde  $\lambda > 0$  es un coeficiente desconocido adimensional a determinar.

Mediante el siguiente cambio de variable:

$$y_1(\eta) = \frac{B - T_1(x, t)}{B - T_f} \quad \text{y} \quad y_2(\eta) = \frac{B - T_2(x, t)}{B - T_f}, \quad (4.13)$$

la frontera libre se mueve de la siguiente manera:

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_2 t}, \quad t > 0, \quad (4.14)$$

y así se obtiene el siguiente resultado que establece la equivalencia entre el problema de Stefan a dos fases (4.4)-(4.10) con dos problemas diferenciales ordinarios acoplados:

**Teorema 4.1.** Sean  $p_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$  con  $i = 1, 2$ . El problema de Stefan definido por (4.4)-(4.10) tiene una solución de tipo similaridad  $(T_1, T_2, s)$  dada por:

$$T_1(x, t) = (T_f - B)y_1(\eta) + B, \quad rs(t) \leq x \leq s(t), \quad t > 0, \quad (4.15)$$

$$T_2(x, t) = (T_f - B)y_2(\eta) + B, \quad x \geq s(t), \quad t > 0, \quad (4.16)$$

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_2 t}, \quad t \geq 0, \quad (4.17)$$

si y solo si las funciones  $y_1 = y_1(\eta) \in C^2(r, 1)$ ,  $y_1 \geq 0$ ,  $y_2 = y_2(\eta) \in C^2(1, +\infty)$ ,  $y_2 \geq 0$  y el parámetro  $\lambda > 0$  satisfacen los siguientes problemas diferenciales ordinarios:

$$\frac{\alpha_1}{2\lambda^2\alpha_2} \left[ (1 + \beta_1 y_1^{p_1}(\eta)) y_1'(\eta) \right]' + (\eta - r) (1 + \beta_1 y_1^{p_1}(\eta)) y_1'(\eta) = 0, \quad r < \eta < 1, \quad (4.18)$$

$$y_1(r) = \frac{A - B}{T_f - B}, \quad (4.19)$$

$$y_1(1) = 1, \quad (4.20)$$

y

$$\frac{1}{2\lambda^2} \left[ (1 + \beta_2 y_2^{p_2}(\eta)) y_2'(\eta) \right]' + \eta (1 + \beta_2 y_2^{p_2}(\eta)) y_2'(\eta) = 0, \quad \eta > 1, \quad (4.21)$$

$$y_2(1) = 1, \quad (4.22)$$

$$y_2(+\infty) = 0, \quad (4.23)$$

acoplados por la siguiente condición

$$\left( \frac{1 + \beta_1}{1 + \beta_2} \right) \frac{k_1^*}{k_2^*} y_1'(1) - y_2'(1) = \frac{-2\lambda^2}{(1 + \beta_2)} \frac{\rho_1}{\rho_2 \text{Ste}}, \quad (4.24)$$

donde  $\text{Ste} = \frac{c_2^*(B - T_f)}{\ell} > 0$  es el número de Stefan.

*Demostración.* Sea  $(T_1, T_2, s)$  dada por (4.15)-(4.17) una solución del problema de Stefan a dos fases (4.4)-(4.10). Teniendo en cuenta el cambio de variable definido en (4.13), siendo  $\eta$  la variable de similaridad dada por (4.12) se tiene que:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = -\frac{1}{2t} (T_f - B) \eta y_1'(\eta), \quad \frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\alpha_2 t}} (T_f - B) y_1'(\eta), \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = -\frac{1}{2t} (T_f - B) \eta y_2'(\eta), \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\alpha_2 t}} (T_f - B) y_2'(\eta). \quad (4.26)$$

Al reemplazar (4.25) en la ecuación (4.4) y teniendo en cuenta que  $\alpha_i = \frac{k_i^*}{\rho_i c_i^*}$  para  $i = 1, 2$ , se obtiene que la función  $y_1 = y_1(\eta)$  debe satisfacer la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$\frac{\alpha_1}{2\lambda^2\alpha_2} \left[ (1 + \beta_1 y_1^{p_1}(\eta)) y_1'(\eta) \right]' + (\eta - r) (1 + \beta_1 y_1^{p_1}(\eta)) y_1'(\eta) = 0, \quad r < \eta < 1,$$

y al reemplazar (4.26) en la ecuación (4.5) se obtiene que  $y_2 = y_2(\eta)$  debe satisfacer la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{1}{2\lambda^2} \left[ (1 + \beta_2 y_2^{p_2}(\eta)) y_2'(\eta) \right]' + \eta (1 + \beta_2 y_2^{p_2}(\eta)) y_2'(\eta) = 0, \quad \eta > 1.$$

La condición (4.7) implica

$$T_i(s(t), t) = (T_f - B)y_i(1) + B = T_f, \quad i = 1, 2,$$

de lo que se obtiene la condición (4.20) si  $i = 1$  para la función  $y_1$ , y la condición (4.22) si  $i = 2$  para la función  $y_2$ .

De la condición (4.10) se tiene

$$T_1(rs(t), t) = (T_f - B)y_1(r) + B = A,$$

de donde se deduce la condición (4.19) para la función  $y_1$ .

La condición (4.6) implica

$$T_2(+\infty, t) = T_2(x, 0) = (T_f - B)y_2(+\infty) + B = B,$$

y por lo tanto se tiene la condición (4.23) para la función  $y_2$ .

Por último, la condición de Stefan (4.8) es equivalente a

$$\frac{k_1^*}{2\lambda\sqrt{\alpha_2 t}}(1 + \beta_1)(T_f - B)y_1'(1) - \frac{k_2^*}{2\lambda\sqrt{\alpha_2 t}}(1 + \beta_2)(T_f - B)y_2'(1) = \frac{\lambda\rho_1\ell\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{t}},$$

y llamando  $\text{Ste} = \frac{c_2^*(B-T_f)}{\ell}$ , se obtiene la condición (4.24) que acopla los dos problemas diferenciales ordinarios (4.18)-(4.20) y (4.21)-(4.23).

Así,  $(y_1, y_2, \lambda)$  es una solución de los problemas diferenciales acoplados (4.18)-(4.24).

Recíprocamente, si  $(y_1, y_2, \lambda)$  es una solución del problema (4.18)-(4.24), mediante el cambio de variable (4.12)-(4.13) se tiene que:

La temperatura  $T_1 = T_1(x, t)$  está dada por (4.15), y teniendo en cuenta (4.18) y (4.25), sigue que  $T_1$  satisface la ecuación (4.4). De forma similar,  $T_2 = T_2(x, t)$  está dada por (4.16), y teniendo en cuenta (4.21) y (4.26) entonces  $T_2$  satisface la ecuación (4.5).

De las condiciones (4.20) y (4.22), se obtiene (4.7) y la frontera libre  $x = s(t)$  está dada por (4.17), verificándose (4.9).

De las condiciones (4.23) y (4.19), se obtienen (4.6) y (4.10), respectivamente. Por último, de (4.24), teniendo en cuenta (4.25) y (4.26), se obtiene la condición de Stefan (4.8).

Luego,  $(T_1, T_2, s)$  dada por (4.15)-(4.17), verifica el problema de Stefan (4.4)-(4.10). ■

En el siguiente lema, se demostrará la equivalencia entre los problemas diferenciales ordinarios acoplados definidos por (4.18)-(4.24), con un problema funcional:

**Lema 4.1.** Sean  $p_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$  con  $i = 1, 2$ ,  $\lambda > 0$ ,  $y_1 \in C^2(r, 1)$  con  $y_1 \geq 0$  y  $y_2 \in C^2(1, +\infty)$  con  $y_2 \geq 0$ . Entonces  $(y_1, y_2, \lambda)$  es una solución de los problemas diferenciales ordinarios acoplados (4.18)-(4.24) si y solo si las funciones  $y_1, y_2$  satisfacen:

$$\mathcal{F}_1(y_1(\eta)) = \mathcal{G}_1(\eta), \quad r \leq \eta \leq 1, \quad (4.27)$$

$$\mathcal{F}_2(y_2(\eta)) = \mathcal{G}_2(\eta), \quad \eta \geq 1, \quad (4.28)$$

y el parámetro  $\lambda > 0$  es una solución de la ecuación:

$$\mathcal{M}(z) = \mathcal{N}(z), \quad z > 0, \quad (4.29)$$

donde

$$\mathcal{F}_i(z) = z + \frac{\beta_i}{1+p_i} z^{1+p_i}, \quad i = 1, 2, \quad z \geq 0, \quad (4.30)$$

$$\mathcal{G}_1(z) = \left( \mathcal{F}_1(1) - \mathcal{F}_1\left(\frac{A-B}{T_f-B}\right) \right) \frac{\operatorname{erf}\left(\lambda\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(z-r)\right)}{\operatorname{erf}\left(\lambda\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)\right)} + \mathcal{F}_1\left(\frac{A-B}{T_f-B}\right), \quad r \leq z \leq 1, \quad (4.31)$$

$$\mathcal{G}_2(z) = \mathcal{F}_2(1) \frac{\operatorname{erfc}(\lambda z)}{\operatorname{erfc}(\lambda)}, \quad z \geq 1, \quad (4.32)$$

$$\mathcal{M}(z) = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{k_1^*}{k_2^*}} \left( \mathcal{F}_1(1) - \mathcal{F}_1\left(\frac{A-B}{T_f-B}\right) \right) \frac{\exp\left(-z^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (1-r)^2\right)}{\operatorname{erf}\left(z\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)\right)} + \mathcal{F}_2(1) \frac{\exp(-z^2)}{\operatorname{erfc}(z)}, \quad z \geq 0, \quad (4.33)$$

$$\mathcal{N}(z) = -z \frac{\sqrt{\pi} \rho_1}{\operatorname{Ste} \rho_2}, \quad z \geq 0. \quad (4.34)$$

*Demostración.* Sea  $(y_1, y_2, \lambda)$  una solución de los problemas diferenciales ordinarios acoplados (4.18)-(4.24).

Definiendo la función  $v_1(\eta) = (1 + \beta_1 y_1^{p_1}(\eta)) y_1'(\eta)$ , la ecuación diferencial ordinaria (4.18) es equivalente a

$$\frac{\alpha_1}{2\lambda^2 \alpha_2} v_1'(\eta) + (\eta - r) v_1(\eta) = 0, \quad r < \eta < 1,$$

y por lo tanto

$$v_1(\eta) = C_1 \exp\left(-\lambda^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (\eta - r)^2\right), \quad r < \eta < 1, \quad (4.35)$$

donde  $C_1 \in \mathbb{R}$ . Así,

$$(1 + \beta_1 y_1^{p_1}(\eta)) y_1'(\eta) = C_1 \exp\left(-\lambda^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (\eta - r)^2\right), \quad r < \eta < 1. \quad (4.36)$$

Si se integra la expresión anterior con respecto a  $\eta$  entre  $r$  y  $1$ , y se tienen en cuenta las condiciones de frontera (4.19)-(4.20), se obtiene:

$$y_1(\eta) + \frac{\beta_1}{1+p_1} y_1^{1+p_1}(\eta) = \frac{C_1}{\lambda} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}\left(\lambda\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(\eta - r)\right) + D_1, \quad r \leq \eta \leq 1, \quad (4.37)$$

donde las constantes reales  $C_1$  y  $D_1$  están dadas por:

$$C_1 = \left( \mathcal{F}_1(1) - \mathcal{F}_1\left(\frac{A-B}{T_f-B}\right) \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \frac{\lambda}{\operatorname{erf}\left(\lambda\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)\right)}, \quad D_1 = \mathcal{F}_1\left(\frac{A-B}{T_f-B}\right), \quad (4.38)$$

es decir,  $y_1 = y_1(\eta)$  satisface la ecuación (4.27).

De manera similar, si se define la función  $v_2(\eta) = (1 + \beta_2 y_2^{p_2}(\eta))y_2'(\eta)$ , la ecuación diferencial ordinaria (4.21) es equivalente a

$$\frac{1}{2\lambda^2}v_2'(\eta) + \eta v_2(\eta) = 0, \quad \eta > 1,$$

y por lo tanto

$$v_2(\eta) = C_2 \exp(-\lambda^2 \eta^2), \quad \eta > 1, \quad (4.39)$$

con  $C_2 \in \mathbb{R}$ . Luego,

$$(1 + \beta_2 y_2^{p_2}(\eta))y_2'(\eta) = C_2 \exp(-\lambda^2 \eta^2), \quad \eta > 1. \quad (4.40)$$

Si se integra esta última igualdad con respecto a  $\eta$  en  $(1, +\infty)$ , y se tienen en cuenta las condiciones (4.22)-(4.23), se obtiene

$$y_2(\eta) + \frac{\beta_2}{1 + p_2} y_2^{1+p_2}(\eta) = \frac{C_2 \sqrt{\pi}}{\lambda} \operatorname{erf}(\lambda \eta) + D_2, \quad \eta \geq 1, \quad (4.41)$$

donde las constantes reales  $C_2$  y  $D_2$  son:

$$C_2 = \mathcal{F}_2(1) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\lambda}{(\operatorname{erf}(\lambda) - 1)}, \quad D_2 = -\frac{C_2 \sqrt{\pi}}{\lambda} \frac{1}{2}, \quad (4.42)$$

y por lo tanto la función  $y_2 = y_2(\eta)$  satisface la ecuación (4.28).

Si en (4.36) y (4.40) se toma  $\eta = 1$ , usando (4.20) y (4.22), se tiene

$$y_1'(1) = \frac{C_1}{1 + \beta_1} \exp\left(-\lambda^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (1 - r)^2\right), \quad y_2'(1) = \frac{C_2}{1 + \beta_2} \exp(-\lambda^2), \quad (4.43)$$

con  $C_1$  y  $C_2$  dadas por (4.38) y (4.42), respectivamente. Finalmente, al sustituir (4.43) en (4.24), se obtiene que  $\lambda > 0$  satisface la ecuación (4.29).

Así,  $(y_1, y_2, \lambda)$  es una solución del problema funcional (4.27)-(4.34).

Recíprocamente, si la terna  $(y_1, y_2, \lambda)$  es una solución del problema funcional (4.27)-(4.34) entonces:

$$y_1(\eta) = -\frac{\beta_1}{1 + p_1} y_1^{1+p_1}(\eta) + \frac{C_1}{\lambda} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}\left(\lambda \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} (\eta - r)\right) + D_1, \quad r \leq \eta \leq 1, \quad (4.44)$$

$$y_2(\eta) = -\frac{\beta_2}{1 + p_2} y_2^{1+p_2}(\eta) + \frac{C_2 \sqrt{\pi}}{\lambda} \operatorname{erf}(\lambda \eta) + D_2, \quad \eta \geq 1, \quad (4.45)$$

donde  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $C_2$  y  $D_2$  están dadas por (4.38) y (4.42), respectivamente.

Mediante simples cálculos, se obtiene que las funciones  $y_1$  dada por (4.44) y  $y_2$  dada por (4.45), satisfacen las ecuaciones diferenciales ordinarias (4.18) y (4.21), respectivamente.

De (4.44), tomando  $\eta = 1$  y  $\eta = r$ , se obtienen:

$$\mathcal{F}_1(y_1(1)) = y_1(1) + \frac{\beta_1}{1 + p_1} y_1^{1+p_1}(1) = 1 + \frac{\beta_1}{1 + p_1}, \quad (4.46)$$

$$\mathcal{F}_1(y_1(r)) = y_1(r) + \frac{\beta_1}{1 + p_1} y_1^{1+p_1}(r) = 1 + \frac{\beta_1}{1 + p_1} \left(\frac{A - B}{T_f - B}\right)^{p_1} + \frac{A - B}{T_f - B}, \quad (4.47)$$

respectivamente, donde (4.46) se verifica si  $y_1(1) = 1$  y (4.47) se satisface si  $y_1(r) = \frac{A-B}{T_f-B}$ . Además, estos valores son únicos porque  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1(z)$  es una función creciente en  $[0, +\infty)$  con  $\mathcal{F}_1(0) = 0$  y  $\mathcal{F}_1(+\infty) = +\infty$ . Así, necesariamente se tienen las condiciones (4.19) y (4.20).

De manera similar, tomando  $\eta = 1$  en (4.45), se obtiene:

$$\mathcal{F}_2(y_2(1)) = y_2(1) + \frac{\beta_2}{1+p_2} y_2^{1+p_2}(1) = 1 + \frac{\beta_2}{1+p_2}, \quad (4.48)$$

la cual se verifica si  $y_2(1) = 1$ . Además, este valor es único pues  $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(z)$  es una función creciente en  $[0, +\infty)$  con  $\mathcal{F}_2(0) = 0$  y  $\mathcal{F}_2(+\infty) = +\infty$ . Por lo tanto, se tiene la condición (4.22).

Si en (4.45) se toma  $\eta \rightarrow +\infty$ , resulta

$$y_2(+\infty) = -\frac{\beta_2}{1+p_2} y_2^{1+p_2}(+\infty),$$

la cual se verifica si  $y_2(+\infty) = 0$ , es decir, la condición (4.23).

Si se derivan (4.44)-(4.45) respecto de  $\eta$ , se las evalúa en  $\eta = 1$  y se tiene en cuenta que  $y_1(1) = y_2(1) = 1$ , se obtienen:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi}(1+\beta_1)}{2\lambda} y_1'(1) &= \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{k_1^*}{k_2^*}} \left( \mathcal{F}_1(1) - \mathcal{F}_1\left(\frac{A-B}{T_f-B}\right) \right) \frac{\exp\left(-\lambda^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (1-r)^2\right)}{\operatorname{erf}\left(\lambda \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} (1-r)\right)}, \\ \frac{\sqrt{\pi}(1+\beta_2)}{2\lambda} y_2'(1) &= -\mathcal{F}_2(1) \frac{\exp(-\lambda^2)}{\operatorname{erfc}(\lambda)}. \end{aligned}$$

Dado que  $\lambda$  es una solución de la ecuación (4.29), teniendo en cuenta las expresiones anteriores se obtiene:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{k_1^*}{k_2^*} \left( \frac{1+\beta_1}{\lambda} \right) y_1'(1) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{1+\beta_2}{\lambda} \right) y_2'(1) = \frac{-\lambda \sqrt{\pi}}{\operatorname{Ste}} \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

esto es, la condición acoplada (4.24).

Luego,  $(y_1, y_2, \lambda)$  es una solución de los problemas diferenciales ordinarios acoplados (4.18)-(4.24). ■

Se probará ahora que el problema funcional definido por (4.27)-(4.34) tiene una única solución, es decir existen únicas funciones  $y_1 \in C^2(r, 1)$  solución de la ecuación (4.27),  $y_2 \in C^2(1, +\infty)$  solución de la ecuación (4.28) y un único parámetro  $\lambda > 0$  solución de la ecuación  $\mathcal{M}(z) = \mathcal{N}(z)$  donde las funciones  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  están definidas por (4.33) y (4.34), respectivamente.

**Lema 4.2.** *Si  $p_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$  con  $i = 1, 2$ , entonces existe una única solución  $(y_1, y_2, \lambda)$  del problema funcional definido por (4.27)-(4.34) con  $\lambda > 0$ ,  $y_1 \in C^2(r, 1)$ ,  $y_1 \geq 0$  y  $y_2 \in C^2(1, +\infty)$ ,  $y_2 \geq 0$ .*

*Demostración.* Nótese primero que  $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i(z)$  definida por (4.30) es una función creciente en  $[0, +\infty)$  y  $\mathcal{F}_i(z) \geq 0$  para todo  $z \geq 0$ , con  $i = 1, 2$ .

Dado que  $A < T_f < B$ , entonces se obtiene  $\frac{A-B}{T_f-B} > 1$  y así

$$\mathcal{F}_1\left(\frac{A-B}{T_f-B}\right) > \mathcal{F}_1(1),$$

de lo que se deduce que, para cada  $\lambda > 0$ , se obtiene que la función  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_1(z)$ ,  $r \leq z \leq 1$  dada por (4.31) satisface:

$$\mathcal{G}_1(z) = \mathcal{F}_1(1) \frac{\operatorname{erf}\left(\lambda \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(z-r)\right)}{\operatorname{erf}\left(\lambda \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)\right)} + \mathcal{F}_1\left(\frac{A-B}{T_f-B}\right) \left(1 - \frac{\operatorname{erf}\left(\lambda \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(z-r)\right)}{\operatorname{erf}\left(\lambda \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)\right)}\right) > \mathcal{F}_1(1) > 0. \quad (4.49)$$

Entonces, para cada  $\lambda > 0$ , existe una única función  $y_1 \in C^2(r, 1)$  solución de la ecuación (4.27) dada por

$$y_1(\eta) = \mathcal{F}_1^{-1}(\mathcal{G}_1(\eta)), \quad r \leq \eta \leq 1. \quad (4.50)$$

Del mismo modo, teniendo en cuenta que  $\mathcal{G}_2(z) \geq 0$ , para cada  $z \geq 1$ , se tiene que existe una única función  $y_2 \in C^2(1, +\infty)$  solución de la ecuación (4.28) y está dada por

$$y_2(\eta) = \mathcal{F}_2^{-1}(\mathcal{G}_2(\eta)), \quad \eta \geq 1. \quad (4.51)$$

Para probar que la ecuación (4.29) tiene única solución, se reescribe la función  $\mathcal{M}$  dada por (4.33) como:

$$\mathcal{M}(z) = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{k_1^*}{k_2^*}} \left( \mathcal{F}_1(1) - \mathcal{F}_1\left(\frac{A-B}{T_f-B}\right) \right) \mathcal{M}_1\left(z \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)\right) + \mathcal{F}_2(1) \mathcal{M}_2(z), \quad z \geq 0, \quad (4.52)$$

con

$$\mathcal{M}_1(z) = \frac{\exp(-z^2)}{\operatorname{erf}(z)}, \quad \mathcal{M}_2(z) = \frac{\exp(-z^2)}{\operatorname{erfc}(z)}, \quad z \geq 0. \quad (4.53)$$

Es fácil ver que estas funciones cumplen con las propiedades:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1(0) &= +\infty, & \mathcal{M}_1(+\infty) &= 0, & \mathcal{M}'_1(z) &< 0, & \forall z > 0, \\ \mathcal{M}_2(0) &= 1, & \mathcal{M}_2(+\infty) &= +\infty, & \mathcal{M}'_2(z) &> 0, & \forall z > 0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Entonces, sigue que la función  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(z)$ ,  $z \geq 0$  es creciente,  $\mathcal{M}(0) = -\infty$  y  $\mathcal{M}(+\infty) = +\infty$ . Además, la función  $\mathcal{N} = \mathcal{N}(z)$ ,  $z \geq 0$  es decreciente y satisface que  $\mathcal{N}(0) = 0$  y  $\mathcal{N}(+\infty) = -\infty$ . Se tiene entonces que existe una única solución  $\lambda > 0$  de la ecuación (4.29).

En conclusión, existe una única terna  $(y_1, y_2, \lambda)$  solución del problema funcional definido por (4.27)-(4.34). ■

**Teorema 4.2.** Sean  $p_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$  con  $i = 1, 2$ . El problema de Stefan a dos fases definido por (4.4)-(4.10) tiene una única solución de tipo similaridad  $(T_1, T_2, s)$  dada por (4.15)-(4.17) donde  $(y_1, y_2, \lambda)$  es la única solución del problema funcional definido por (4.27)-(4.34) con  $\lambda > 0$ ,  $y_1 \in C^2(r, 1)$ ,  $y_1 \geq 0$  y  $y_2 \in C^2(1, +\infty)$ ,  $y_2 \geq 0$ .

*Demostración.* Sigue inmediatamente del Teorema 4.1, del Lema 4.1 y del Lema 4.2. ■

**Observación 4.1.** Para cada  $z \in (r, 1)$ , la función  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_1(z)$  definida por (4.31), verifica:

$$\mathcal{G}'_1(z) = \left( \mathcal{F}_1(1) - \mathcal{F}_1\left(\frac{A-B}{T_f-B}\right) \right) \frac{2\lambda\sqrt{\alpha_2} \exp\left(-\lambda^2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(z-r)^2\right)}{\sqrt{\pi\alpha_1} \operatorname{erf}\left(\lambda\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)\right)} < 0. \quad (4.55)$$

Luego:

$$\mathcal{F}_1(1) = \mathcal{G}_1(1) \leq \mathcal{G}_1(z) \leq \mathcal{G}_1(r) = \mathcal{F}_1\left(\frac{A-B}{T_f-B}\right), \quad r \leq z \leq 1. \quad (4.56)$$

Además, como  $\mathcal{F}_1^{-1} = \mathcal{F}_1^{-1}(z)$  es una función creciente en  $[0, +\infty)$ , se deduce que  $y_1(\eta) = \mathcal{F}_1^{-1}(\mathcal{G}_1(\eta))$  es una función decreciente en  $[r, 1]$ , que satisface la siguiente desigualdad:

$$1 = y_1(1) \leq y_1(\eta) \leq y_1(r) = \frac{A-B}{T_f-B}, \quad r \leq \eta \leq 1. \quad (4.57)$$

Luego, y en virtud del Teorema 4.1, se tiene como era de esperar que:

$$A \leq T_1(x, t) \leq T_f, \quad rs(t) \leq x \leq s(t), \quad t \geq 0. \quad (4.58)$$

De manera similar, para cada  $z > 1$ , la función  $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_2(z)$  definida por (4.32) satisface

$$\mathcal{G}'_2(z) = \frac{-2\lambda\mathcal{F}_2(1) \exp(\lambda^2 z^2)}{\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\lambda)} < 0,$$

entonces

$$\mathcal{G}_2(+\infty) = 0 \leq \mathcal{G}_2(z) \leq \mathcal{G}_2(1) = \mathcal{F}_2(1), \quad z \geq 1. \quad (4.59)$$

Teniendo en cuenta que  $\mathcal{F}_2^{-1} = \mathcal{F}_2^{-1}(z)$  es una función creciente en  $[0, +\infty)$ , se tiene que  $y_2(\eta) = \mathcal{F}_2^{-1}(\mathcal{G}_2(\eta))$  es una función decreciente en  $[1, +\infty)$  que satisface la siguiente desigualdad:

$$0 = y_2(+\infty) \leq y_2(\eta) \leq y_2(1) = 1, \quad \eta \geq 1, \quad (4.60)$$

y del Teorema 4.1, se obtiene como era de esperar:

$$T_f \leq T_2(x, t) \leq B, \quad x \geq s(t), \quad t \geq 0. \quad (4.61)$$

**Observación 4.2.** (Caso particular  $p_1 = p_2 = 0$ ) Si se considera  $p_1 = p_2 = 0$ , los coeficientes térmicos dados en (4.2)-(4.3) son constantes, es decir, la conductividad térmica y el calor específico están dados por:

$$k_i = k_i^* (1 + \beta_i), \quad c_i = c_i^* (1 + \beta_i), \quad (4.62)$$

respectivamente con  $\beta_i \geq 0$  para  $i = 1, 2$ .

En este caso, la única solución  $y_1 = y_1(\eta)$  de la ecuación (4.27) puede obtenerse de forma explícita y viene dada por:

$$y_1(\eta) = \left( \frac{T_f - A}{T_f - B} \right) \frac{\operatorname{erf}\left(\lambda\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(\eta - r)\right)}{\operatorname{erf}\left(\lambda\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1 - r)\right)} + \frac{A - B}{T_f - B}, \quad r \leq \eta \leq 1, \quad (4.63)$$



la única solución  $y_2 = y_2(\eta)$  de la ecuación (4.28) también puede darse explícitamente por:

$$y_2(\eta) = \frac{\operatorname{erfc}(\lambda\eta)}{\operatorname{erfc}(\lambda)}, \quad \eta \geq 1, \quad (4.64)$$

y de (4.29),  $\lambda > 0$  es la única solución de la ecuación:

$$\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \frac{k_1}{k_2} \left( \frac{T_f - A}{T_f - B} \right) \frac{\exp\left(-z^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (1-r)^2\right)}{\operatorname{erf}\left(z \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} (1-r)\right)} + \frac{\exp(-z^2)}{\operatorname{erfc}(z)} = -z \frac{\sqrt{\pi}}{\operatorname{Ste}} \frac{\rho_1}{\rho_2 (1 + \beta_2)}. \quad (4.65)$$

Por lo tanto, puede observarse que se recuperan los resultados obtenidos en [144].

**Observación 4.3.** (Caso particular  $p_1 = p_2 = 1$ ) Si se considera  $p_1 = p_2 = 1$ , los coeficientes térmicos dados en (4.2)-(4.3) son lineales, es decir, la conductividad térmica y el calor específico están dados por:

$$k_i(T_i) = k_i^* \left( 1 + \beta_i \left( \frac{T_i - B}{T_f - B} \right) \right), \quad c_i(T_i) = c_i^* \left( 1 + \beta_i \left( \frac{T_i - B}{T_f - B} \right) \right), \quad (4.66)$$

respectivamente con  $\beta_i \geq 0$  para  $i = 1, 2$ .

La única solución  $y_1 = y_1(\eta)$  de la ecuación (4.27) viene dada explícitamente por:

$$y_1(\eta) = \frac{1}{\beta_1} \left( -1 + \sqrt{1 + 2\beta_1 \hat{\mathcal{G}}_1(\eta)} \right), \quad r \leq \eta \leq 1, \quad (4.67)$$

donde

$$\hat{\mathcal{G}}_1(\eta) = \left( 1 + \frac{\beta_1}{2} - \frac{A-B}{T_f-B} - \frac{\beta_1}{2} \left( \frac{A-B}{T_f-B} \right)^2 \right) \frac{\operatorname{erf}\left(\lambda \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} (\eta-r)\right)}{\operatorname{erf}\left(\lambda \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} (1-r)\right)} + \frac{A-B}{T_f-B} + \frac{\beta_1}{2} \left( \frac{A-B}{T_f-B} \right)^2, \quad (4.68)$$

la única solución  $y_2 = y_2(\eta)$  de la ecuación (4.28) también se obtiene en forma explícita y está dada por:

$$y_2(\eta) = \frac{1}{\beta_2} \left( -1 + \sqrt{1 + \beta_2 (2 + \beta_2) \frac{\operatorname{erfc}(\lambda\eta)}{\operatorname{erfc}(\lambda)}} \right), \quad \eta \geq 1. \quad (4.69)$$

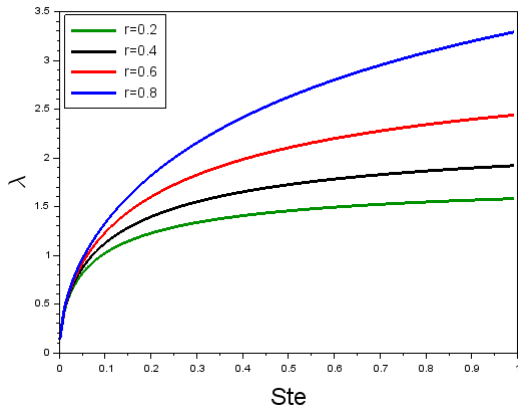
Por último, de (4.29),  $\lambda > 0$  es la única solución de la ecuación:

$$\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \frac{k_1^*}{k_2^*} \left( 1 + \frac{\beta_1}{2} - \frac{A-B}{T_f-B} - \frac{\beta_1}{2} \left( \frac{A-B}{T_f-B} \right)^2 \right) \frac{\exp\left(-z^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (1-r)^2\right)}{\operatorname{erf}\left(z \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} (1-r)\right)} + (1 + \frac{\beta_2}{2}) \frac{\exp(-z^2)}{\operatorname{erfc}(z)} = -z \frac{\sqrt{\pi}}{\operatorname{Ste}} \frac{\rho_1}{\rho_2}. \quad (4.70)$$

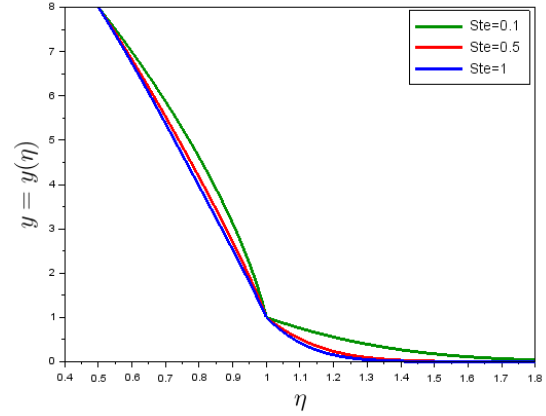
En la Figura 4.2a, se traza la solución  $\lambda$  de la ecuación (4.70) en función de Ste, para  $r = 0.2$ ,  $r = 0.4$ ,  $r = 0.6$  y  $r = 0.8$ . Además, en la Figura 4.2b, se grafica la función dada por

$$y(\eta) = \begin{cases} y_1(\eta) & \text{si } r \leq \eta \leq 1 \\ y_2(\eta) & \text{si } \eta > 1 \end{cases}$$

donde  $y_1$  está dada por (4.67) y  $y_2$  está definida por (4.69), para  $r = 0.5$ .



(a) Coeficiente  $\lambda = \lambda(\text{Ste})$  variando  $r$



(b) Función  $y = y(\eta)$  variando  $\text{Ste}$

Figura 4.2: Gráficas del coeficiente  $\lambda = \lambda(\text{Ste})$  para distintos valores de  $r$  y de la función  $y = y(\eta)$  para diferentes valores de  $\text{Ste}$ , considerando:  $\frac{k_1^*}{k_2^*} = 1$ ,  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\frac{A-B}{T_f-B} = 8$ ,  $p_1 = p_2 = 1$ .

#### 4.1.2. Existencia y unicidad de solución del problema de frontera libre a dos fases con una condición de tipo Neumann

En esta sección se prueba la existencia y unicidad de solución de tipo similaridad del problema de frontera libre a dos fases en un dominio angular con una condición de tipo Neumann en el borde  $x = rs(t)$  definido por (4.4)-(4.9) y (4.11), donde las temperaturas  $T_1 = T_1(x, t)$  y  $T_2 = T_2(x, t)$  dependen de la variable de similaridad dada por

$$\eta = \frac{x}{2\mu\sqrt{\alpha_2 t}}, \quad (4.71)$$

donde  $\mu > 0$  es un coeficiente adimensional desconocido a determinar. Mediante el cambio de variables:

$$z_1(\eta) = \frac{B - T_1(x, t)}{B - T_f} \quad \text{y} \quad z_2(\eta) = \frac{B - T_2(x, t)}{B - T_f}, \quad (4.72)$$

la frontera libre se mueve como

$$s(t) = 2\mu\sqrt{\alpha_2 t}, \quad t > 0, \quad (4.73)$$

y por lo tanto siguiendo un razonamiento similar al que se desarrolla en el Teorema 4.1, se obtiene el siguiente resultado que establece una equivalencia entre el problema de Stefan a dos fases definido por (4.4)-(4.9) y (4.11) con dos problemas diferenciales ordinarios acoplados:

**Teorema 4.3.** Sean  $p_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$  con  $i = 1, 2$ . El problema de Stefan a dos fases definido por (4.4)-(4.9) y (4.11) tiene una solución de tipo similaridad  $(T_1, T_2, s)$  dada por:

$$T_1(x, t) = (T_f - B) z_1(\eta) + B, \quad rs(t) \leq x \leq s(t), \quad t \geq 0, \quad (4.74)$$

$$T_2(x, t) = (T_f - B) z_2(\eta) + B, \quad x \geq s(t), \quad t > 0, \quad (4.75)$$

$$s(t) = 2\mu\sqrt{\alpha_2 t}, \quad t \geq 0, \quad (4.76)$$

si y solo si las funciones  $z_1 = z_1(\eta) \in C^2(r, 1)$  con  $z_1 \geq 0$ ,  $z_2 = z_2(\eta) \in C^2(1, +\infty)$  con  $z_2 \geq 0$  y el parámetro  $\mu > 0$  satisfacen los siguientes problemas diferenciales ordinarios:

$$\frac{\alpha_1}{2\mu^2\alpha_2} \left[ (1 + \beta_1 z_1^{p_1}(\eta)) z_1'(\eta) \right]' + (\eta - r) (1 + \beta_1 z_1^{p_1}(\eta)) z_1'(\eta) = 0, \quad r < \eta < 1, \quad (4.77)$$

$$(1 + \beta_1 z_1^{p_1}(r)) z_1'(r) = \frac{2\mu\sqrt{\alpha_2}q_0}{(T_f - B)k_1^*}, \quad (4.78)$$

$$z_1(1) = 1, \quad (4.79)$$

y

$$\frac{1}{2\mu^2} \left[ (1 + \beta_2 z_2^{p_2}(\eta)) z_2'(\eta) \right]' + \eta (1 + \beta_2 z_2^{p_2}(\eta)) z_2'(\eta) = 0, \quad \eta > 1, \quad (4.80)$$

$$z_2(1) = 1, \quad (4.81)$$

$$z_2(+\infty) = 0, \quad (4.82)$$

acoplados con la siguiente condición

$$\left( \frac{1 + \beta_1}{1 + \beta_2} \right) \frac{k_1^*}{k_2^*} z_1'(1) - z_2'(1) = \frac{-2\mu^2}{(1 + \beta_2)} \frac{\rho_1}{\rho_2 \text{Ste}}, \quad (4.83)$$

donde  $\text{Ste} = \frac{c_2^*(B-T_f)}{\ell} > 0$  es el número de Stefan.

Como en el Lema 4.1, se puede establecer una equivalencia entre los problemas diferenciales ordinarios acoplados (4.77)-(4.83) con un problema funcional:

**Lema 4.3.** Sean  $p_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$  con  $i = 1, 2$ ,  $\mu > 0$ ,  $z_1 \in C^2(r, 1)$  con  $z_1 \geq 0$  y  $z_2 \in C^2(1, +\infty)$  con  $z_2 \geq 0$ . Entonces  $(z_1, z_2, \mu)$  es una solución de los problemas diferenciales ordinarios acoplados (4.77)-(4.83) si y solo si las funciones  $z_1$  y  $z_2$  verifican:

$$\mathcal{F}_1(z_1(\eta)) = \mathcal{G}_1^*(\eta), \quad r \leq \eta \leq 1, \quad (4.84)$$

$$\mathcal{F}_2(z_2(\eta)) = \mathcal{G}_2^*(\eta), \quad \eta \geq 1, \quad (4.85)$$

y el parámetro  $\mu > 0$  es una solución de la ecuación:

$$\mathcal{M}^*(z) = \mathcal{N}^*(z), \quad z > 0, \quad (4.86)$$

donde  $\mathcal{F}_i$  con  $i = 1, 2$  está dada por (4.30) y

$$\mathcal{G}_1^*(z) = \mathcal{F}_1(1) + \frac{\sqrt{\alpha_1 \pi} q_0}{k_1^*(B-T_f)} \left( \text{erf} \left( \mu \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} (1-r) \right) - \text{erf} \left( \mu \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} (z-r) \right) \right), \quad r \leq z \leq 1, \quad (4.87)$$

$$\mathcal{G}_2^*(z) = \mathcal{F}_2(1) \frac{\text{erfc}(\mu z)}{\text{erfc}(\mu)}, \quad z \geq 1, \quad (4.88)$$

$$\mathcal{M}^*(z) = z \frac{\rho_1}{\rho_2 \text{Ste}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathcal{F}_2(1) \frac{\exp(-z^2)}{\text{erfc}(z)}, \quad z \geq 0, \quad (4.89)$$

$$\mathcal{N}^*(z) = \frac{\sqrt{\alpha_2} q_0}{(B-T_f)k_2^*} \exp \left( -z^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (1-r)^2 \right), \quad z \geq 0. \quad (4.90)$$

*Demostración.* Es similar a la demostración del Lema 4.1. Para ello, sea  $(z_1, z_2, \mu)$  una solución de los problemas diferenciales ordinarios acoplados (4.77)-(4.83).

Llamando  $w_1(\eta) = (1 + \beta_1 z_1^{p_1}(\eta)) z_1'(\eta)$ , la ecuación diferencial ordinaria (4.77) es equivalente a

$$\frac{\alpha_1}{2\mu^2\alpha_2} w_1'(\eta) + (\eta - r)w_1(\eta) = 0, \quad r < \eta < 1,$$

y por lo tanto

$$z_1(\eta) + \frac{\beta_1}{1+p_1} z_1^{1+p_1}(\eta) = \frac{C_3}{\mu} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}\left(\mu \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(\eta - r)\right) + D_3, \quad (4.91)$$

con  $C_3$  y  $D_3$  constantes reales.

Teniendo en cuenta las condiciones (4.78) y (4.79), resulta:

$$C_3 = -\frac{2\mu q_0 \sqrt{\alpha_2}}{k_1^*(B - T_f)}, \quad D_3 = 1 + \frac{\beta_1}{1+p_1} + \frac{q_0 \sqrt{\alpha_1 \pi}}{k_1^*(B - T_f)} \operatorname{erf}\left(\mu \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1 - r)\right), \quad (4.92)$$

y sustituyendo estas constantes en (4.91), resulta que  $z_1 = z_1(\eta)$  con  $r \leq \eta \leq 1$ , satisface

$$z_1(\eta) + \frac{\beta_1}{1+p_1} z_1^{1+p_1}(\eta) = 1 + \frac{\beta_1}{1+p_1} + \frac{\sqrt{\alpha_1 \pi} q_0}{k_1^*(B - T_f)} \left( \operatorname{erf}\left(\mu \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1 - r)\right) - \operatorname{erf}\left(\mu \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(\eta - r)\right) \right),$$

es decir (4.84).

Del Lema 4.1 se deduce directamente que, de la ecuación (4.80) y de las condiciones (4.81)-(4.82), la función  $z_2 = z_2(\eta)$  con  $\eta \geq 1$  satisface (4.85).

Finalmente, si se derivan con respecto a  $\eta$  las expresiones (4.84)-(4.85), evaluándolas en  $\eta = 1$  y usando las condiciones (4.79) y (4.81), se obtienen:

$$z_1'(1) = \frac{-2\mu q_0 \sqrt{\alpha_2}}{(1+\beta_1)k_1^*(B-T_f)} \exp\left(-\mu^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(1-r)^2\right), \quad z_2'(1) = -\left(1 + \frac{\beta_2}{p_2+1}\right) \frac{2\mu \exp(-\mu^2)}{(1'+\beta_2) \operatorname{erfc}(\mu)},$$

y de (4.83), se tiene que  $\mu > 0$  satisface la ecuación (4.86).

Recíprocamente, si  $(z_1, z_2, \mu)$  es una solución del problema funcional definido por (4.84)-(4.90), fácilmente se prueba que  $(z_1, z_2, \mu)$  es una solución de los problemas diferenciales ordinarios acoplados (4.77)-(4.83). ■

Como en la sección anterior, se probará ahora que el problema funcional definido por (4.84)-(4.90) tiene una única solución, es decir existen únicas funciones  $z_1 \in C^2(r, 1)$  solución de la ecuación (4.84),  $z_2 \in C^2(1, +\infty)$  solución de la ecuación (4.85) y un único parámetro  $\mu > 0$  solución de la ecuación  $\mathcal{M}^*(z) = \mathcal{N}^*(z)$  donde las funciones  $\mathcal{M}^*$  y  $\mathcal{N}^*$  están definidas por (4.89) y (4.90), respectivamente.

**Lema 4.4.** *Si  $p_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$  con  $i = 1, 2$ , entonces existe una única solución  $(z_1, z_2, \mu)$  del problema funcional definido por (4.84)-(4.90) con  $\mu > 0$ ,  $z_1 \in C^2(r, 1)$ ,  $z_1 \geq 0$  y  $z_2 \in C^2(1, +\infty)$ ,  $z_2 \geq 0$  si y solo si*

$$q_0 > \frac{(B - T_f)k_2^*}{\sqrt{\alpha_2 \pi}} \left(1 + \frac{\beta_2}{p_2 + 1}\right). \quad (4.93)$$

*Demostración.* Nótese primero que, de acuerdo a (4.30), existe  $\mathcal{F}_i^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  con  $i = 1, 2$ .

Dado que  $\mathcal{G}_1^*(z) \geq 0$  si  $r \leq z \leq 1$ , entonces, para cada  $\mu > 0$  existe una única función  $z_1 \in C^2(r, 1)$  solución a la ecuación (4.84) dada por

$$z_1(\eta) = \mathcal{F}_1^{-1}(\mathcal{G}_1^*(\eta)), \quad r \leq \eta \leq 1. \quad (4.94)$$

De igual manera que en el Lema 4.2, se deduce que fijado  $\mu > 0$ , existe una única función  $z_2 \in C^2(1, \infty)$  solución de la ecuación (4.85) y está dada por

$$z_2(\eta) = \mathcal{F}_2^{-1}(\mathcal{G}_2^*(\eta)), \quad \eta \geq 1. \quad (4.95)$$

Queda por demostrar que la ecuación (4.86) tiene una única solución  $\mu > 0$ . Para ello, si se reescribe la función  $\mathcal{M}^*$  dada por (4.89) como:

$$\mathcal{M}^*(z) = z \frac{\rho_1}{\rho_2 \text{Ste}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathcal{F}_2(1) \mathcal{M}_2(z), \quad z \geq 0, \quad (4.96)$$

donde  $\mathcal{M}_2$  está definida en (4.53), y se tienen en cuenta las propiedades dadas en (4.54), sigue inmediatamente que:

$$\mathcal{M}^*(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( 1 + \frac{\beta_2}{p_2+1} \right), \quad \mathcal{M}^*(+\infty) = +\infty, \quad \mathcal{M}^{*'}(z) > 0, \quad \forall z > 0. \quad (4.97)$$

Como además, la función  $\mathcal{N}^*$  dada por (4.90) verifica que:

$$\mathcal{N}^*(0) = \frac{\sqrt{\alpha_2 q_0}}{(B - T_f) k_2^*}, \quad \mathcal{N}^*(+\infty) = 0, \quad \mathcal{N}^{*'}(z) < 0, \quad \forall z > 0, \quad (4.98)$$

se puede deducir que existe una única solución  $\mu > 0$  de la ecuación (4.86) si y solo si se verifica que  $\mathcal{N}^*(0) > \mathcal{M}^*(0)$ . Esto es:

$$\frac{\sqrt{\alpha_2 q_0}}{(B - T_f) k_2^*} > \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( 1 + \frac{\beta_2}{p_2 + 1} \right), \quad (4.99)$$

es decir (4.93).

En conclusión, existe una única terna  $(z_1, z_2, \mu)$  que es solución del problema funcional definido por (4.84)-(4.90) si y solo si se satisface (4.93). ■

Así, del Teorema 4.3 en el que se prueba la equivalencia entre el problema de Stefan a dos fases definido por (4.4)-(4.9) y (4.11) con los problemas diferenciales ordinarios acoplados definido por (4.77)-(4.83), del Lema 4.3 en el que se demuestra la equivalencia entre los problemas diferenciales ordinarios acoplados (4.77)-(4.83) y el problema funcional definido por (4.84)-(4.90) y del Lema 4.4 donde se prueba la existencia y unicidad de solución del problema funcional (4.84)-(4.90), se tiene el siguiente resultado principal:

**Teorema 4.4.** Sean  $p_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$  con  $i = 1, 2$ . El problema de Stefan a dos fases definido por (4.4)-(4.9) y (4.11) tiene una única solución de tipo similaridad  $(T_1, T_2, s)$  dada por (4.74)-(4.76) donde  $(z_1, z_2, \mu)$  es la única solución del problema funcional definido por (4.84)-(4.90) con  $\mu > 0$ ,  $z_1 \in C^2(r, 1)$ ,  $z_1 \geq 0$ ,  $z_2 \in C^2(1, +\infty)$ ,  $z_2 \geq 0$  si y solo si se satisface (4.93).

**Observación 4.4.** (Caso particular  $p_1 = p_2 = 0$ ) Se consideran  $p_1 = p_2 = 0$ , la conductividad térmica y el calor específico están dados por (4.62).

La única solución  $z_1 = z_1(\eta)$  de la ecuación (4.84) viene dada en forma explícita por:

$$z_1(\eta) = 1 + \frac{\sqrt{\alpha_1 \pi} q_0}{k_1(1+\beta_1)(B-T_f)} \left( \operatorname{erf}(\mu \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)) - \operatorname{erf}(\mu \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(\eta-r)) \right), \quad r \leq \eta \leq 1, \quad (4.100)$$

y la única solución  $z_2 = z_2(\eta)$  de la ecuación (4.85) está dada explícitamente por:

$$z_2(\eta) = \frac{\operatorname{erfc}(\mu \eta)}{\operatorname{erfc}(\mu)}, \quad \eta \geq 1. \quad (4.101)$$

Además, de (4.86),  $\mu > 0$  es la única solución de la ecuación:

$$z \frac{\rho_1}{\rho_2 \operatorname{Ste}} + \frac{1 + \beta_2 \exp(-z^2)}{\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(z)} = \frac{\sqrt{\alpha_2} q_0}{(B-T_f)k_2^*} \exp\left(-z^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (1-r)^2\right), \quad z \geq 0, \quad (4.102)$$

si y solo si

$$q_0 > \frac{(B-T_f)k_2^*(1+\beta_2)}{\sqrt{\alpha_2 \pi}}.$$

Por lo tanto se recuperan los resultados obtenidos en [144]. También, si  $r = 0$  (es decir,  $\rho_1 = \rho_2$ ) se tiene el resultado obtenido en [179].

**Observación 4.5.** (Caso particular  $p_1 = p_2 = 1$ ) Si se consideran  $p_1 = p_2 = 1$ , la conductividad térmica y el calor específico están dados por (4.66).

En este caso, la única solución  $z_1 = z_1(\eta)$  de la ecuación (4.84) viene dada explícitamente por:

$$z_1(\eta) = \frac{1}{\beta_1} \left( -1 + \sqrt{1 + 2\beta_1 \hat{\mathcal{G}}_1^*(\eta)} \right), \quad r \leq \eta \leq 1, \quad (4.103)$$

con

$$\hat{\mathcal{G}}_1^*(\eta) = 1 + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\sqrt{\alpha_1 \pi} q_0}{k_1^*(B-T_f)} \left( \operatorname{erf}\left(\mu \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)\right) - \operatorname{erf}\left(\mu \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(\eta-r)\right) \right),$$

la única solución  $z_2 = z_2(\eta)$  de la ecuación (4.85) está dada en forma explícita por:

$$z_2(\eta) = \frac{1}{\beta_2} \left( -1 + \sqrt{1 + \beta_2 (2 + \beta_2) \frac{\operatorname{erfc}(\mu \eta)}{\operatorname{erfc}(\mu)}} \right), \quad \eta \geq 1, \quad (4.104)$$

y de (4.86),  $\mu > 0$  es la única solución de la ecuación:

$$z \frac{\rho_1}{\rho_2 \operatorname{Ste}} + \frac{2 + \beta_2 \exp(-z^2)}{2\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(z)} = \frac{\sqrt{\alpha_2} q_0}{(B-T_f)k_2^*} \exp\left(-z^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (1-r)^2\right), \quad z \geq 0, \quad (4.105)$$

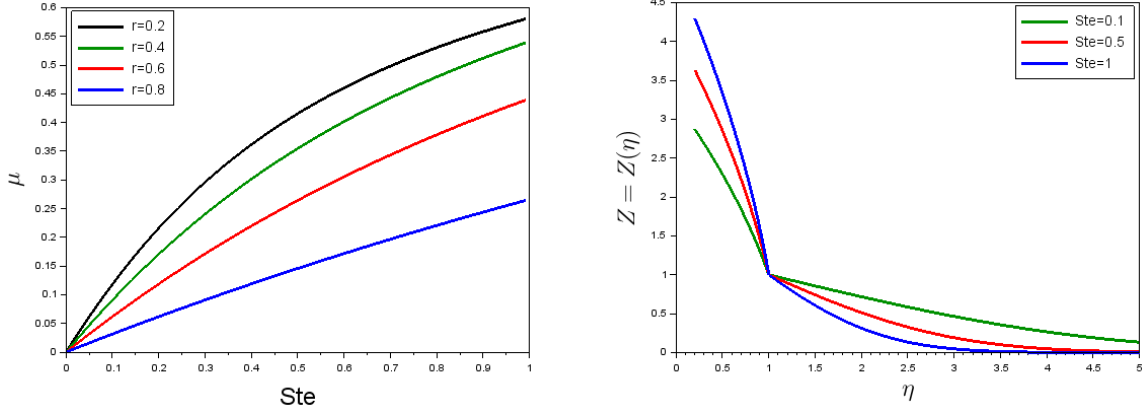
si y solo si

$$q_0 > \frac{(B-T_f)(2+\beta_2)k_2^*}{2\sqrt{\alpha_2 \pi}}. \quad (4.106)$$

En la Figura 4.3a, se grafica la solución  $\mu$  de la ecuación (4.105) en función de Ste, para  $r = 0.2$ ,  $r = 0.4$ ,  $r = 0.6$  y  $r = 0.8$ . Además, en la Figura 4.3b se grafica la función definida por

$$Z(\eta) = \begin{cases} z_1(\eta) & \text{si } r \leq \eta \leq 1 \\ z_2(\eta) & \text{si } \eta > 1 \end{cases}$$

donde  $z_1$  está dada por (4.103) y  $z_2$  está definida por (4.104).



(a) Coeficiente  $\mu = \mu(Ste)$  variando  $r$

(b)  $Z = Z(\eta)$  variando  $Ste$  con  $r = 0.2$

Figura 4.3: Gráficas del coeficiente  $\mu = \mu(Ste)$  para diferentes valores de  $r$  y de la función  $Z = Z(\eta)$  variando  $Ste$  con  $r = 0.2$  para  $k_1^* = k_2^* = 1$ ,  $\alpha_1 = 10$ ,  $\alpha_2 = 5$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $B - T_f = 5$ ,  $q_0 = 30$ ,  $p_1 = p_2 = 1$ .

**Observación 4.6.** Si el coeficiente  $q_0$  satisface

$$0 < q_0 \leq \frac{(B - T_f)k_2^*}{\sqrt{\alpha_2\pi}} \left( 1 + \frac{\beta_2}{p_2 + 1} \right),$$

entonces el problema de frontera libre definido por (4.4)-(4.9) y (4.11), es un clásico problema de transferencia de calor (sin proceso de cambio de fase) para la fase líquida inicial dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( k_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) &= \rho_2 c_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial t}, & x > 0, \quad t > 0, \\ T_2(+\infty, t) = T_2(x, 0) &= B > T_f, & x > 0, \quad t > 0, \\ k_2(T_2(0, t)) \frac{\partial T_2}{\partial x}(0, t) &= \frac{q_0}{\sqrt{t}}, & t > 0, \end{aligned}$$

cuya única solución de tipo similaridad es

$$T_2(x, t) = (T_f - B) z_2 \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}} \right) + B, \quad x \geq 0, \quad t > 0,$$

donde

$$z_2(\eta) = \mathcal{F}_2^{-1} \left( \frac{q_0 \sqrt{\pi \alpha_2}}{k_2^*(B - T_f)} \operatorname{erfc}(\eta) \right), \quad \eta \geq 0,$$

con  $\mathcal{F}_2$  dada por (4.30).

## 4.2. Determinación de coeficientes térmicos desconocidos

En esta última sección se estudia el problema de Stefan a dos fases en un dominio angular con una condición de tipo Dirichlet en  $x = rs(t)$  dado por (4.4)-(4.10) junto con la

sobrecondición de tipo Neumann (4.11) en  $x = rs(t)$  siguiendo la idea dada en [180]. Este problema consiste en encontrar las temperaturas  $T_1 = T_1(x, t)$ ,  $T_2 = T_2(x, t)$ , la frontera libre  $x = s(t)$  y un coeficiente térmico elegido entre  $\{\rho_1, \rho_2, c_1^*, c_2^*, k_1^*, k_2^*, \ell\}$ .

De acuerdo al Teorema 4.2, la única solución de tipo similaridad  $(T_1, T_2, s)$  del problema (4.4)-(4.10) está dada por (4.15)-(4.17) donde las funciones  $y_1 = y_1(\eta)$ ,  $y_2 = y_2(\eta)$  se obtienen por (4.27)-(4.28) y el coeficiente  $\lambda > 0$  es la única solución de la ecuación (4.29), es decir:

$$\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \frac{k_1^*}{k_2^*} \left( \mathcal{F}_1(1) - \mathcal{F}_1\left(\frac{A-B}{T_f-B}\right) \right) \frac{\exp\left(-\lambda^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (1-r)^2\right)}{\operatorname{erf}\left(\lambda \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} (1-r)\right)} + \mathcal{F}_2(1) \frac{\exp(-\lambda^2)}{\operatorname{erfc}(\lambda)} = -\lambda \frac{\sqrt{\pi}}{\operatorname{Ste}} \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad (4.107)$$

y del hecho que  $\alpha_i = \frac{k_i^*}{\rho_i c_i^*}$  con  $i = 1, 2$ , y  $\operatorname{Ste} = \frac{c_2^*(B-T_f)}{\ell}$ , se obtiene

$$\frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_2^*}} m^* \mathcal{M}_1\left(\lambda \sqrt{\frac{k_2^* \rho_2 c_1^*}{k_1^* \rho_1 c_2^*}}\right) - \mathcal{F}_2(1) \mathcal{M}_2(\lambda) = \frac{\lambda \sqrt{\pi} \ell \rho_1}{c_2^*(B-T_f) \rho_2}, \quad (4.108)$$

donde

$$m^* = \mathcal{F}_1\left(\frac{A-B}{T_f-B}\right) - \mathcal{F}_1(1) > 0, \quad (4.109)$$

siendo las funciones  $\mathcal{F}_i$  y  $\mathcal{M}_i$  con  $i = 1, 2$  definidas por (4.30) y (4.53), respectivamente.

Además, si se pide que la solución  $(T_1, T_2, s)$  del problema (4.4)-(4.10) también satisfaga la sobrecondición (4.11) se obtiene, mediante el cambio de variables dado por (4.12)-(4.13),

$$(1 + \beta_1 y_1^{p_1}(r)) y_1'(r) = \frac{2\lambda \sqrt{\alpha_2} q_0}{(T_f - B) k_1^*},$$

o equivalentemente de (4.13),

$$y_1'(r) = \frac{2\lambda q_0 \sqrt{\alpha_2}}{k_1^* \left(1 + \beta_1 \left(\frac{A-B}{T_f-B}\right)^{p_1}\right) (T_f - B)}, \quad (4.110)$$

Si se deriva con respecto a  $\eta$  la ecuación (4.27) que satistace la función  $y_1$ , se tiene:

$$(1 + \beta_1 y_1^{p_1}(\eta)) y_1'(\eta) = \left( \mathcal{F}_1(1) - \mathcal{F}_1\left(\frac{A-B}{T_f-B}\right) \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \frac{\lambda}{\operatorname{erf}\left(\lambda \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} (1-r)\right)} \exp\left(-\lambda^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (\eta - r)^2\right),$$

que al evaluarla en  $\eta = r$ , usando (4.19) y la condición (4.110), conduce a la siguiente igualdad:

$$-\frac{q_0}{k_1^*(B-T_f)} = \left( \mathcal{F}_1(1) - \mathcal{F}_1\left(\frac{A-B}{T_f-B}\right) \right) \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha_1}} \frac{1}{\operatorname{erf}\left(\lambda \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} (1-r)\right)},$$

Por último, como  $\alpha_i = \frac{k_i^*}{\rho_i c_i^*}$  ( $i = 1, 2$ ), de (4.1) y de (4.109), se obtiene:

$$\frac{q_0 \sqrt{\pi}}{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}} \operatorname{erf}\left(\lambda \sqrt{\frac{k_2^* \rho_2 c_1^*}{k_1^* \rho_1 c_2^*}}\right) = (B - T_f) m^*. \quad (4.111)$$



Por lo tanto, (4.108) y (4.111) son las dos ecuaciones para la determinación del coeficiente  $\lambda$  que caracteriza la frontera libre y un coeficiente térmico elegido entre los siguientes  $\{\rho_1, \rho_2, c_1^*, c_2^*, k_1^*, k_2^*, \ell\}$  que se obtienen al resolver el sistema:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_2^*}} m^* \mathcal{M}_1 \left( \lambda \frac{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_2^*}} \right) - \mathcal{F}_2(1) \mathcal{M}_2(\lambda) = \frac{\lambda \sqrt{\pi} \ell \rho_1}{c_2^* (B - T_f) \rho_2}, \\ \frac{q_0 \sqrt{\pi}}{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}} \operatorname{erf} \left( \lambda \frac{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_2^*}} \right) = (B - T_f) m^*. \end{cases} \quad (4.112)$$

Se divide el estudio en siete casos diferentes:

- † Caso 1: Determinación de  $\lambda, \rho_1$ .
- † Caso 2: Determinación de  $\lambda, \rho_2$ .
- † Caso 3: Determinación de  $\lambda, c_1^*$ .
- † Caso 4: Determinación de  $\lambda, c_2^*$ .
- † Caso 5: Determinación de  $\lambda, k_1^*$ .
- † Caso 6: Determinación de  $\lambda, k_2^*$ .
- † Caso 7: Determinación de  $\lambda, \ell$ .

**Teorema 4.5.** (*Caso 1:*  $\lambda, \rho_1$ ) *Sean las constantes positivas:*

$$R_1 = \frac{\sqrt{k_1^* c_1^*}}{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_2^*}} m^*, \quad Q_1 = \frac{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^* c_2^*}}, \quad D_1 = \frac{\ell \sqrt{\pi}}{c_2^* \rho_2 (B - T_f)}, \quad P_1 = \frac{\sqrt{k_1^* c_1^*}}{q_0 \sqrt{\pi}} (B - T_f) m^*. \quad (4.113)$$

Si se verifica que

$$q_0 > \left( 1 + \frac{\beta_2}{1 + p_2} \right) \frac{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_2^*}}{\sqrt{\pi}} (B - T_f), \quad (4.114)$$

entonces existe una única solución  $(\lambda, \rho_1)$  del sistema (4.112) dada por

$$\lambda = \frac{\bar{z}_1 \operatorname{erf}^{-1}(\bar{z}_1)}{Q_1 P_1}, \quad \rho_1 = \frac{\bar{z}_1^2}{P_1^2}, \quad (4.115)$$

donde  $\bar{z}_1$  es la única solución de la siguiente ecuación

$$\mathcal{L}_1(z) = \mathcal{R}_1(z), \quad 0 < z < 1, \quad (4.116)$$

con

$$\mathcal{L}_1(z) = \frac{R_1}{P_1} \exp \left( - \left( \operatorname{erf}^{-1}(z) \right)^2 \right) - \mathcal{F}_2(1) \mathcal{M}_2 \left( \frac{z \operatorname{erf}^{-1}(z)}{Q_1 P_1} \right), \quad 0 < z < 1,$$

$$\mathcal{R}_1(z) = \frac{D_1}{Q_1 P_1^3} z^3 \operatorname{erf}^{-1}(z), \quad 0 < z < 1.$$

*Demostración.* Si se define

$$\bar{z}_1 = P_1 \sqrt{\rho_1},$$

teniendo en cuenta la ecuación (4.111), se obtiene que  $\lambda$  y  $\rho_1$  vienen dadas por la fórmula (4.115) como funciones de  $\bar{z}_1$  donde se asume que  $\bar{z}_1 \in (0, 1)$  de modo que  $\operatorname{erf}^{-1}(\bar{z}_1)$  esté bien definido.

Si se reemplaza este valor de  $\lambda$  en la ecuación (4.108) se obtiene que  $\bar{z}_1$  debe ser una solución a la ecuación (4.116).

Por un lado, se tiene que  $\mathcal{L}_1$  es una función decreciente en  $(0, 1)$  con  $\mathcal{L}_1(1) = -\infty$  y  $\mathcal{L}_1(0) = \frac{R_1}{P_1} - \mathcal{F}_2(1)$ . Por otro lado,  $\mathcal{R}_1$  es una función creciente en  $(0, 1)$  tal que  $\mathcal{R}_1(0) = 0$  y  $\mathcal{R}_1(1) = +\infty$ . Por lo tanto, si se asume que

$$\mathcal{L}_1(0) = \frac{R_1}{P_1} - \mathcal{F}_2(1) = \frac{q_0 \sqrt{\pi}}{(B - T_f) \sqrt{k_2^* \rho_2 c_2^*}} - 1 - \frac{\beta_2}{1 + p_2} > 0,$$

es decir, (4.114), se puede garantizar que existe un único  $\bar{z}_1 \in (0, 1)$  solución de la ecuación (4.116).

Así, bajo esta hipótesis, existen únicos  $\lambda$  y  $\rho_1$  que resuelven el sistema (4.112). ■

**Teorema 4.6. (Caso 2:  $\lambda, \rho_2$ )** Sean las constantes positivas:

$$R_2 = \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{\sqrt{k_2^* c_2^*}} m^*, \quad Q_2 = \frac{\sqrt{k_2^* c_1^*}}{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_2^*}}, \quad D_2 = \frac{\ell \rho_1 \sqrt{\pi}}{c_2^* (B - T_f)}, \quad P_2 = \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{q_0 \sqrt{\pi}} (B - T_f) m^*. \quad (4.117)$$

Si se verifica que

$$q_0 > \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\bar{z}_2)} (B - T_f) m^*, \quad (4.118)$$

donde  $\bar{z}_2$  es la única solución de la ecuación

$$G(z) = \frac{3}{2} \sqrt{\pi} \mathcal{F}_2(1), \quad z > 0, \quad (4.119)$$

con

$$\begin{aligned} G(z) &= R_2 Q_2 \frac{\mathcal{M}_1(z)}{z} \mathcal{H}(\sqrt{g(z)}), \quad z > 0, \\ \mathcal{H}(z) &= \sqrt{\pi} z \operatorname{erfc}(z) \exp(z^2), \quad z > 0, \\ g(z) &= \frac{R_2}{3 Q_2 D_2} z \mathcal{M}_1(z), \quad z > 0, \end{aligned}$$

entonces, existen dos soluciones  $(\lambda_1, \rho_{21})$  y  $(\lambda_2, \rho_{22})$  del sistema (4.112).

Los coeficientes  $\rho_{2i}$  vienen dados por

$$\rho_{2i} = \left( \frac{\operatorname{erf}^{-1}(P_2)}{\lambda_i Q_2} \right)^2, \quad (4.120)$$

y  $\lambda_i$  con  $i = 1, 2$ , son soluciones positivas de la siguiente ecuación

$$\mathcal{L}_2(z) = \mathcal{R}_2(z), \quad z > 0, \quad (4.121)$$

con

$$\mathcal{L}_2(z) = z \frac{Q_2 R_2}{\operatorname{erf}^{-1}(P_2)} \mathcal{M}_1(\operatorname{erf}^{-1}(P_2)) - z^3 \frac{Q_2^2 D_2}{(\operatorname{erf}^{-1}(P_2))^2}, \quad z > 0,$$

$$D_2(z) = \mathcal{F}_2(1) \mathcal{M}_2(z), \quad z > 0.$$

*Demostración.* Asumiendo  $P_2 < 1$ , de la ecuación (4.111) se obtiene que el coeficiente  $\rho_2$  está dado en función de  $\lambda$  por la expresión (4.120). Por la ecuación (4.108), sigue que  $\lambda$  debe satisfacer (4.121).

Por un lado,  $\mathcal{R}_2$  es una función creciente en  $(0, +\infty)$  la cual verifica  $\mathcal{R}_2(0) = \mathcal{F}_2(1)$  y  $\mathcal{R}_2(+\infty) = +\infty$ . Por otro lado,  $\mathcal{L}_2(0) = 0$  y  $\mathcal{L}_2(+\infty) = -\infty$ . Si se define:

$$\bar{\lambda} = \left( \frac{R_2 \operatorname{erf}^{-1}(P_2) \mathcal{M}_1(\operatorname{erf}^{-1}(P_2))}{3Q_2 D_2} \right)^{1/2},$$

se obtiene que  $\mathcal{L}_2$  es función creciente en  $(0, \bar{\lambda})$  y es decreciente en  $(\bar{\lambda}, +\infty)$ . Por lo tanto, si se supone que

$$\mathcal{L}_2(\bar{\lambda}) > \mathcal{R}_2(\bar{\lambda}), \quad (4.122)$$

entonces existen dos soluciones  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de la ecuación (4.121) y así el sistema (4.112) tiene dos soluciones  $(\lambda_1, \rho_{21})$  y  $(\lambda_2, \rho_{22})$ .

En efecto, es fácil ver que  $\bar{\lambda} = \sqrt{g(\operatorname{erf}^{-1}(P_2))}$  y por lo tanto la condición (4.122) es equivalente a

$$G(\operatorname{erf}^{-1}(P_2)) = R_2 Q_2 \frac{\mathcal{M}_1(\operatorname{erf}^{-1}(P_2))}{\operatorname{erf}^{-1}(P_2)} \mathcal{H}\left(\sqrt{g(\operatorname{erf}^{-1}(P_2))}\right) > \frac{3}{2} \sqrt{\pi} \mathcal{F}_2(1). \quad (4.123)$$

De [95] se sabe que  $\mathcal{H}$  es una función creciente en  $(0, +\infty)$  que verifica  $\mathcal{H}(0) = 0$  y  $\mathcal{H}(+\infty) = 1$ . Además,  $g$  es una función decreciente en  $(0, +\infty)$  tal que  $g(0) = \frac{\sqrt{\pi} R_2}{6Q_2 D_2}$  y  $g(+\infty) = 0$ . Entonces

$$G(z) = R_2 Q_2 \frac{\mathcal{M}_1(z)}{z} \mathcal{H}(\sqrt{g(z)}), \quad z > 0,$$

es una función decreciente que satisface  $G(0) = +\infty$  y  $G(+\infty) = 0$ . Como consecuencia la desigualdad (4.123) se cumple si y solo si  $\operatorname{erf}^{-1}(P_2) < \bar{z}_2$  donde  $\bar{z}_2$  es la única solución de la ecuación (4.119).

Por tanto, si  $P_2 < \min\{1, \operatorname{erf}(\bar{z}_2)\} = \operatorname{erf}(\bar{z}_2)$ , es decir (4.118), se obtiene que existen  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  que resuelven la ecuación (4.121). ■

**Teorema 4.7. (Caso 3:  $\lambda, c_1^*$ )** Sean las constantes positivas:

$$R_3 = \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1}}{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_2^*}} m^*, \quad Q_3 = \frac{\sqrt{k_2^* \rho_2}}{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_2^*}}, \quad D_3 = \frac{\ell \rho_1 \sqrt{\pi}}{c_2^* \rho_2 (B - T_f)}, \quad P_3 = \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1}}{q_0 \sqrt{\pi}} (B - T_f) m^*. \quad (4.124)$$

Si se supone que

$$q_0 > q_0^*, \quad (4.125)$$

donde  $q_0^* > 0$  es la única solución de la ecuación

$$z = \frac{\ell \rho_1^2 k_1^*}{2\rho_2} \frac{1}{z} + \sqrt{\frac{k_2^* c_2^* \rho_2}{\pi}} \mathcal{F}_2(1) \mathcal{M}_2 \left( \frac{\rho_1 k_1^* (B - T_f) m^*}{2z} \sqrt{\frac{c_2^*}{k_2^* \rho_2}} \right), \quad z > 0, \quad (4.126)$$

entonces existe una única solución  $(\lambda, c_1^*)$  del sistema (4.112) dada por

$$\lambda = \frac{P_3}{Q_3} \frac{\operatorname{erf}^{-1}(\bar{z}_3)}{\bar{z}_3}, \quad c_1^* = \frac{\bar{z}_3^2}{P_3^2}, \quad (4.127)$$

donde  $\bar{z}_3$  es la única solución de la siguiente ecuación

$$\mathcal{L}_3(z) = \mathcal{R}_3(z), \quad 0 < z < 1, \quad (4.128)$$

con

$$\mathcal{L}_3(z) = \frac{R_3}{P_3} \exp\left(-(\operatorname{erf}^{-1}(z))^2\right), \quad 0 < z < 1,$$

$$\mathcal{R}_3(z) = \frac{P_3 D_3}{Q_3} \frac{\operatorname{erf}^{-1}(z)}{z} + \mathcal{F}_2(1) \mathcal{M}_2 \left( \frac{P_3 \operatorname{erf}^{-1}(z)}{Q_3 z} \right), \quad 0 < z < 1.$$

*Demostración.* Si se define

$$\bar{z}_3 = P_3 \sqrt{c_1^*},$$

y se tiene en cuenta la ecuación (4.111), se obtiene fácilmente que  $\lambda$  y  $c_1^*$  están dados por (4.127) donde  $\bar{z}_3 \in (0, 1)$  para que  $\operatorname{erf}^{-1}(\bar{z}_3)$  tenga sentido.

Reemplazando el valor de  $\lambda$  dado por (4.127) en (4.108) se sigue que  $\bar{z}_3$  debe ser una solución de la ecuación (4.128).

La función  $\mathcal{L}_3$  es decreciente en  $(0, 1)$  y verifica  $\mathcal{L}_3(0) = \frac{R_3}{P_3}$  y  $\mathcal{L}_3(1) = 0$ . Por otro lado,  $\mathcal{R}_3$  es una función creciente en  $(0, 1)$  tal que  $\mathcal{R}_3(0) = \frac{P_3 D_3 \sqrt{\pi}}{2Q_3} + \mathcal{F}_2(1) \mathcal{M}_2 \left( \frac{\sqrt{\pi} P_3}{2Q_3} \right)$  y  $\mathcal{R}_3(1) = +\infty$ . Por lo tanto, bajo el supuesto

$$\mathcal{L}_3(0) = \frac{R_3}{P_3} > \frac{P_3 D_3 \sqrt{\pi}}{2Q_3} + \mathcal{F}_2(1) \mathcal{M}_2 \left( \frac{\sqrt{\pi} P_3}{2Q_3} \right) = \mathcal{R}_3(0),$$

que es equivalente a  $q_0 > q_0^*$  donde  $q_0^* > 0$  es una solución a la ecuación (4.126), existe un  $\bar{z}_3 \in (0, 1)$  solución de la ecuación (4.128).

Para garantizar la existencia de un único  $\bar{z}_3 \in (0, 1)$  solución de la ecuación (4.128), basta con estudiar la existencia de un único  $q_0^* > 0$  que satisfaga (4.126).

Para ello, si se define la función  $\mathcal{J} = \mathcal{J}(z)$  con  $z > 0$ , como el lado derecho de la ecuación (4.126), entonces  $\mathcal{J}$  es una función decreciente en  $(0, +\infty)$  con  $\mathcal{J}(0) = +\infty$  y  $\mathcal{J}(+\infty) = \sqrt{\frac{k_2^* c_2^* \rho_2}{\pi}} \mathcal{F}_2(1) > 0$ . Luego, existe un único  $q_0^* > 0$  solución de la ecuación  $z = \mathcal{J}(z)$ ,  $z > 0$ , es decir, de (4.126).

Luego, bajo esta suposición, existe una única solución  $(\lambda, c_1^*)$  del sistema (4.112). ■

**Teorema 4.8. (Caso 4:**  $\lambda, c_2^*$ ) *Sean las constantes positivas:*

$$R_4 = \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{\sqrt{k_2^* \rho_2}} m^*, \quad Q_4 = \frac{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^* \rho_1}}, \quad D_4 = \frac{\ell \rho_1 \sqrt{\pi}}{\rho_2 (B - T_f)}, \quad P_4 = \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{q_0 \sqrt{\pi}} (B - T_f) m^*. \quad (4.129)$$

*Si se supone que:*

$$q_0 > \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*} (B - T_f) m^*}{\operatorname{erf}(\bar{z}_4) \sqrt{\pi}}, \quad (4.130)$$

donde  $\bar{z}_4$  es la única solución de la ecuación

$$\frac{z}{\mathcal{M}_1(z)} = \frac{R_4 Q_4}{D_4}, \quad z > 0, \quad (4.131)$$

entonces existe una única solución  $(\lambda, c_2^*)$  del sistema (4.112).

El coeficiente  $c_2^*$  viene dado por

$$c_2^* = \left( \frac{\lambda Q_4}{\operatorname{erf}^{-1}(P_4)} \right)^2, \quad (4.132)$$

y  $\lambda$  es la única solución positiva de la siguiente ecuación

$$\mathcal{R}_4(z) = \mathcal{L}_4, \quad z > 0, \quad (4.133)$$

donde

$$\mathcal{L}_4 = \left[ R_4 \mathcal{M}_1(\operatorname{erf}^{-1}(P_4)) - \frac{D_4}{Q_4} \operatorname{erf}^{-1}(P_4) \right] \frac{\operatorname{erf}^{-1}(P_4)}{Q_4},$$

$$\mathcal{R}_4(z) = \mathcal{F}_2(1) z \mathcal{M}_2(z), \quad z > 0.$$

*Demostración.* Teniendo en cuenta la ecuación (4.111), si se asume  $P_4 < 1$ , entonces se obtiene la expresión (4.132) para  $c_2^*$ .

Al reemplazar este valor de  $c_2^*$  en la ecuación (4.108), se obtiene la ecuación no lineal (4.133) para  $\lambda$ . Como  $\mathcal{R}_4$  es una función creciente en  $(0, +\infty)$  que satisface  $\mathcal{R}_4(0) = 0$  y  $\mathcal{R}_4(+\infty) = +\infty$ , si se asume  $\mathcal{L}_4 > 0$ , entonces existe un único  $\lambda$  que satisface (4.133).

De hecho,  $\mathcal{L}_4 > 0$  es equivalente a

$$h(\operatorname{erf}^{-1}(P_4)) < \frac{R_4 Q_4}{D_4}, \quad (4.134)$$

donde la función  $h = h(z)$  con  $z > 0$  está definida por el lado izquierdo de la ecuación (4.131).

De [95] se sabe que  $h'(z) > 0$  para todo  $z > 0$ ,  $h(0) = 0$  y  $h(+\infty) = +\infty$ . Entonces, la desigualdad (4.134) se cumple si y solo si  $\operatorname{erf}^{-1}(P_4) < \bar{z}_4$  donde  $\bar{z}_4$  es la única solución de la ecuación (4.131).

Por lo tanto, si se tiene que  $P_4 < \min\{1, \operatorname{erf}(\bar{z}_4)\} = \operatorname{erf}(\bar{z}_4)$ , es decir, (4.130), entonces existe un único  $\lambda$  solución de la ecuación (4.133).

Así, bajo la hipótesis (4.130), existe una única solución  $(\lambda, c_2^*)$  del sistema (4.112). ■

**Teorema 4.9. (Caso 5:  $\lambda, k_1^*$ )** Sean las constantes positivas:

$$R_5 = \frac{\sqrt{\rho_1 c_1^*}}{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_2^*}} m^*, \quad Q_5 = \frac{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_2^*}}{\sqrt{\rho_1 c_1^*}}, \quad D_5 = \frac{\ell \rho_1 \sqrt{\pi}}{c_2^* \rho_2 (B - T_f)}, \quad P_5 = \frac{\sqrt{\rho_1 c_1^*}}{q_0 \sqrt{\pi}} (B - T_f) m^*. \quad (4.135)$$

Si se supone que

$$q_0 > \left(1 + \frac{\beta_2}{1 + p_2}\right) (B - T_f) \frac{\sqrt{k_2^* c_2^* \rho_2}}{\sqrt{\pi}}, \quad (4.136)$$

entonces existe una única solución  $(\lambda, k_1^*)$  del sistema (4.112) dada por

$$\lambda = \frac{\bar{z}_5 \operatorname{erf}^{-1}(\bar{z}_5)}{Q_5 P_5}, \quad k_1^* = \frac{\bar{z}_5^2}{P_5^2}, \quad (4.137)$$

donde  $\bar{z}_5$  es la solución única de la siguiente ecuación

$$\mathcal{L}_5(z) = \mathcal{R}_5(z), \quad 0 < z < 1, \quad (4.138)$$

con

$$\mathcal{L}_5(z) = \frac{R_5}{P_5} \exp\left(-(\operatorname{erf}^{-1}(z))^2\right) - \mathcal{F}_2(1) \mathcal{M}_2\left(\frac{z \operatorname{erf}^{-1}(z)}{Q_5 P_5}\right), \quad 0 < z < 1,$$

$$\mathcal{R}_5(z) = \frac{D_5}{Q_5 P_5} z \operatorname{erf}^{-1}(z), \quad 0 < z < 1.$$

*Demostración.* Si se define

$$\bar{z}_5 = P_5 \sqrt{k_1^*},$$

teniendo en cuenta la ecuación (4.111), sigue que  $\lambda$  y  $k_1^*$  están dados por (4.137) donde  $\bar{z}_5 \in (0, 1)$ . Entonces, de la ecuación (4.108) se tiene que  $\bar{z}_5$  debe satisfacer la ecuación (4.138).

La función  $\mathcal{R}_5$  es creciente en  $(0, 1)$  tal que  $\mathcal{R}_5(0) = 0$  y  $\mathcal{R}_5(1) = +\infty$ . Además,  $\mathcal{L}_5$  es una función decreciente en  $(0, 1)$  tal que  $\mathcal{L}_5(0) = \frac{R_5}{P_5} - \mathcal{F}_2(1)$  y  $\mathcal{L}_5(1) = -\infty$ . En consecuencia, bajo el supuesto

$$\mathcal{L}_5(0) = \frac{R_5}{P_5} - \mathcal{F}_2(1) = \frac{q_0 \sqrt{\pi}}{(B - T_f) \sqrt{k_2^* \rho_2 c_2^*}} - 1 - \frac{\beta_2}{1 + p_2} > 0,$$

es decir, (4.136), existe una única solución  $\bar{z}_5 \in (0, 1)$  de la ecuación (4.138).

Luego, existe una única solución  $(\lambda, k_1^*)$  del sistema (4.112). ■

**Teorema 4.10. (Caso 6:  $\lambda, k_2^*$ )** Sean las constantes positivas:

$$R_6 = \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{\sqrt{\rho_2 c_2^*}} m^*, \quad Q_6 = \frac{\sqrt{\rho_2 c_2^*}}{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}, \quad D_6 = \frac{\ell \rho_1 \sqrt{\pi}}{c_2^* \rho_2 (B - T_f)}, \quad P_6 = \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{q_0 \sqrt{\pi}} (B - T_f) m^*. \quad (4.139)$$

Si se supone que

$$q_0 > \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*} (B - T_f) m^*}{\operatorname{erf}(\bar{w}_6) \sqrt{\pi}}, \quad (4.140)$$

donde  $\bar{w}_6$  es la única solución de la ecuación

$$\frac{z}{\mathcal{M}_1(z)} = \frac{R_6 Q_6}{D_6 + \sqrt{\pi} \mathcal{F}_2(1)}, \quad z > 0, \quad (4.141)$$

entonces existe una única solución  $(\lambda, k_2^*)$  del sistema (4.112).

El coeficiente  $k_2^*$  viene dado por

$$k_2^* = \left( \frac{\operatorname{erf}^{-1}(P_6)}{\lambda Q_6} \right)^2, \quad (4.142)$$

y  $\lambda$  es la única solución positiva de la siguiente ecuación

$$\mathcal{L}_6(z) = \mathcal{R}_6, \quad z > 0, \quad (4.143)$$

con

$$\mathcal{L}_6(z) = \frac{z}{\mathcal{M}_2(z)}, \quad 0 < z < 1,$$

$$\mathcal{R}_6 = \frac{\mathcal{F}_2(1)}{Q_6 R_6 \frac{\mathcal{M}_1(\operatorname{erf}^{-1}(P_6))}{\operatorname{erf}^{-1}(P_6)} - D_6}.$$

*Demostración.* Primero, se asume  $P_6 < 1$  para que la ecuación (4.111) esté bien definida. Entonces, de esta ecuación se obtiene inmediatamente el coeficiente  $k_2^*$ , en función de  $\lambda$ , dado por (4.142).

Si se reemplaza este valor de  $k_2^*$  en (4.108), se obtiene la ecuación (4.143) para el coeficiente  $\lambda$ .

De [95], se sabe que  $\mathcal{L}_6$  es una función creciente en  $(0, +\infty)$  tal que  $\mathcal{L}_6(0) = 0$  y  $\mathcal{L}_6(+\infty) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ . Por tanto, se puede garantizar que existe una solución única  $\lambda$  de la ecuación (4.143) si la constante  $\mathcal{R}_6$  verifica la siguiente desigualdad

$$0 < \mathcal{R}_6 < \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

o equivalentemente

$$h(\operatorname{erf}^{-1}(P_6)) < \frac{R_6 Q_6}{D_6 + \sqrt{\pi} \mathcal{F}_2(1)} < \frac{R_6 Q_6}{D_6}, \quad (4.144)$$

donde  $h$  es la función definida por el lado izquierdo de la ecuación (4.141).

Como  $h$  es una función creciente en  $(0, +\infty)$  que satisface  $h(0) = 0$  y  $h(+\infty) = +\infty$ , se deduce que existe un valor único  $\bar{w}_6 > 0$  tal que:

$$h(\bar{w}_6) = \frac{R_6 Q_6}{D_6 + \mathcal{F}_2(1) \sqrt{\pi}}, \quad h(z) < \frac{R_6 Q_6}{D_6 + \mathcal{F}_2(1) \sqrt{\pi}}, \quad \forall z < \bar{w}_6,$$

Luego, la desigualdad (4.144) es equivalente a  $\operatorname{erf}^{-1}(P_6) < \bar{w}_6$ , es decir, (4.140). Por lo tanto, bajo esta hipótesis, se obtiene que existe un único par  $(\lambda, k_2^*)$  solución del sistema (4.112). ■

**Teorema 4.11. (Caso 7:  $\lambda, \ell$ )** Sean las constantes positivas:

$$R_7 = \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_2^*}} m^*, \quad Q_7 = \frac{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_2^*}}{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}, \quad D_7 = \frac{\rho_1 \sqrt{\pi}}{c_2^* \rho_2 (B - T_f)}, \quad P_7 = \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{q_0 \sqrt{\pi}} (B - T_f) m^*. \quad (4.145)$$

Si supone que

$$q_0 > \frac{(B - T_f) m^* \sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{\operatorname{erf}(\bar{z}_7) \sqrt{\pi}}, \quad (4.146)$$

donde  $\bar{z}_7$  es la única solución de la ecuación

$$R_7 \mathcal{M}_1(z) - \mathcal{F}_2(1) \mathcal{M}_2\left(\frac{z}{Q_7}\right) = 0, \quad z > 0, \quad (4.147)$$

entonces existe una única solución  $(\lambda, \ell)$  del sistema (4.112) dada por

$$\lambda = \frac{\operatorname{erf}^{-1}(P_7)}{Q_7}, \quad (4.148)$$

$$\ell = \left[ R_7 \mathcal{M}_1(\operatorname{erf}^{-1}(P_7)) - \mathcal{F}_2(1) \mathcal{M}_2\left(\frac{\operatorname{erf}^{-1}(P_7)}{Q_7}\right) \right] \frac{Q_7}{D_7 \operatorname{erf}^{-1}(P_7)}. \quad (4.149)$$

*Demostración.* Si se asume  $P_7 < 1$ , de la ecuación (4.111) se tiene que  $\lambda$  está dada por (4.148).

De (4.108) sigue que  $\ell$  está definido por (4.149) donde para que  $\ell > 0$  es necesario que

$$j(\operatorname{erf}^{-1}(P_7)) > 0,$$

donde  $j = j(z)$  con  $z > 0$  es la función que se define como el lado izquierdo de la ecuación (4.147).

Teniendo en cuenta que  $j$  es una función decreciente en  $(0, +\infty)$  con  $j(0) = +\infty$  y  $j(+\infty) = -\infty$ , se tiene que existe un único  $\bar{z}_7$  tal que  $j(\bar{z}_7) = 0$ ,  $j(z) > 0$  para  $0 < z < \bar{z}_7$  y  $j(z) < 0$  para  $z > \bar{z}_7$ .

Por lo tanto la desigualdad  $j(\operatorname{erf}^{-1}(P_7)) > 0$  es equivalente a  $\operatorname{erf}^{-1}(P_7) < \bar{z}_7$ . Luego, si se asume  $P_7 < \min\{1, \operatorname{erf}(\bar{z}_7)\} = \operatorname{erf}(\bar{z}_7)$ , es decir, (4.146), se puede garantizar que existe un único par  $(\lambda, \ell)$  solución del sistema (4.112). ■

En la Tabla 4.1, se muestra un resumen de todos los casos estudiados. En cada uno, se especifica la restricción sobre  $q_0$  que corresponde a los coeficientes desconocidos que se determinan en función de las constantes positivas  $R_i$ ,  $Q_i$ ,  $D_i$  y  $P_i$  con  $i = 1, 2, \dots, 7$ , definidas por (4.113), (4.117), (4.124), (4.129), (4.135), (4.139) y (4.145), respectivamente.



Tabla 4.1: Resumen de casos

Caso	Restricción	Solución
Caso 1 $\lambda, \rho_1$	$q_0 > \left(1 + \frac{\beta_2}{1+p_2}\right) \frac{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_2^*}}{\sqrt{\pi}} (B - T_f)$	$\lambda = \frac{\bar{z}_1 \operatorname{erf}^{-1}(\bar{z}_1)}{Q_1 P_1}, \quad \rho_1 = \frac{\bar{z}_1^2}{P_1^2}$ donde $\bar{z}_1$ es la única solución de (4.116)
Caso 2 $\lambda, \rho_2$	$q_0 > \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\bar{z}_2)} (B - T_f) m^*$ donde $\bar{z}_2$ es la única solución de (4.119)	$\rho_{2i} = \left(\frac{\operatorname{erf}^{-1}(P_2)}{\lambda_i Q_2}\right)^2$ $\lambda_i$ es solución de (4.121) con $i = 1, 2$
Caso 3 $\lambda, c_1^*$	$q_0 > q_0^*$ donde $q_0^* > 0$ es la única solución de (4.126)	$\lambda = \frac{P_3 \operatorname{erf}^{-1}(\bar{z}_3)}{Q_3 \bar{z}_3}, \quad c_1^* = \frac{\bar{z}_3^2}{P_3^2}$ donde $\bar{z}_3$ es la única solución de (4.128)
Caso 4 $\lambda, c_2^*$	$q_0 > \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*} (B - T_f) m^*}{\operatorname{erf}(\bar{z}_4) \sqrt{\pi}}$ donde $\bar{z}_4$ es la única solución de (4.131)	$c_2^* = \left(\frac{\lambda Q_4}{\operatorname{erf}^{-1}(P_4)}\right)^2$ $\lambda$ es la única solución de (4.133)
Caso 5 $\lambda, k_1^*$	$q_0 > \left(1 + \frac{\beta_2}{1+p_2}\right) (B - T_f) \frac{\sqrt{k_2^* c_2^* \rho_2}}{\sqrt{\pi}}$	$\lambda = \frac{\bar{z}_5 \operatorname{erf}^{-1}(\bar{z}_5)}{Q_5 P_5}, \quad k_1^* = \frac{\bar{z}_5^2}{P_5^2}$ donde $\bar{z}_5$ es la única solución de (4.138)
Caso 6 $\lambda, k_2^*$	$q_0 > \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*} (B - T_f) m^*}{\operatorname{erf}(\bar{w}_6) \sqrt{\pi}}$ donde $\bar{w}_6$ es la única solución de (4.141)	$k_2^* = \left(\frac{\operatorname{erf}^{-1}(P_6)}{\lambda Q_6}\right)^2$ $\lambda$ es la única solución de (4.143)
Caso 7 $\lambda, \ell$	$q_0 > \frac{(B - T_f) m^* \sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{\operatorname{erf}(\bar{z}_7) \sqrt{\pi}}$ donde $\bar{z}_7$ es la única solución de (4.147)	$\lambda = \frac{\operatorname{erf}^{-1}(P_7)}{Q_7},$ $\ell = \frac{\left[ R_7 \mathcal{M}_1(\operatorname{erf}^{-1}(P_7)) - \mathcal{F}_2(1) \mathcal{M}_2\left(\frac{\operatorname{erf}^{-1}(P_7)}{Q_7}\right) \right] Q_7}{D_7 \operatorname{erf}^{-1}(P_7)}$

## Capítulo 5

# Soluciones aproximadas de problemas de Stefan a una fase mediante métodos de balance integral

En este capítulo se estudian problemas de Stefan unidimensionales a una fase para la fusión de un material semi-ininfinito  $x > 0$  de los que se obtienen soluciones analíticas aproximadas de los mismos mediante el método de balance integral clásico [96] y dos variantes: el método de balance integral modificado y el método de balance integral refinado [164, 197] en los que se propone en cada uno de ellos un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial. Los métodos de balance integral calórico son técnicas matemáticas aproximadas para resolver problemas de transferencia de calor y particularmente para determinar la ubicación de la frontera libre en problemas de conducción de calor que involucran un cambio de fase.

Este capítulo está organizado en cuatro secciones:

En la primera sección, se presenta un problema de Stefan a una fase con coeficientes térmicos constantes, donde se impone una condición convectiva o de tipo Robin en el borde fijo  $x = 0$  de la forma:

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{h}{\sqrt{t}}(T(0, t) - T_0), \quad t > 0,$$

siendo  $T_0$  la temperatura ambiente y  $h > 0$  el coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo  $x = 0$ . Este problema fue estudiado en [185] y es un caso particular del desarrollado en el Capítulo 2 de esta Tesis. Para este problema, se obtienen soluciones analíticas aproximadas con un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial aplicando los siguientes métodos: balance integral clásico, balance integral modificado y balance integral refinado. También, se estudia el comportamiento asintótico de las soluciones aproximadas obtenidas cuando  $h \rightarrow +\infty$ , recuperando las soluciones aproximadas cuando se impone una condición de temperatura  $T_0$  en el borde fijo  $x = 0$  en dichos problemas. Además, se comparan las soluciones aproximadas con la solución exacta del problema de Stefan, analizando el error cometido en cada caso.

En la segunda sección, se considera un problema de Stefan a una fase para una ecuación no clásica del calor con una fuente de calor externa  $F$  que depende de la evolución del

flujo de calor en  $x = 0$ , es decir:

$$F \left( \frac{\partial T}{\partial x}(0, t), t \right) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{t}} \frac{\partial T}{\partial x}(0, t), \quad t > 0,$$

donde  $\lambda_0 > 0$  es una constante dada, los coeficientes térmicos son constantes y se impone una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo  $x = 0$ . Este problema fue estudiado en [56] y es un caso particular del desarrollado en el Capítulo 3 de esta Tesis. Además, este problema también puede verse como un caso particular del estudiado en la sección anterior considerando la fuente nula, es decir  $F \equiv 0$ . Al disponer de la solución exacta del problema de Stefan con condición de temperatura en el borde fijo  $x = 0$  dada en [56], se obtienen soluciones analíticas aproximadas utilizando el método del balance integral, el método de balance integral modificado y el método de balance integral refinado, comparando cada una de estas soluciones con la exacta.

En la tercera sección, se realiza un estudio similar del problema de Stefan planteado en la sección anterior que resulta de imponer una condición convectiva o de tipo Robin en el borde fijo  $x = 0$ . Para realizar este análisis, se obtiene previamente la solución exacta de este problema y se estudian los casos límite de las soluciones aproximadas obtenidas cuando  $h \rightarrow +\infty$ , recuperando las soluciones aproximadas cuando se impone una condición de temperatura en el borde fijo  $x = 0$  que fueron obtenidas en la sección dos.

Por último, en la cuarta sección, se obtienen únicas soluciones explícitas aproximadas aplicando el método de balance integral, el método de balance integral modificado y el método de balance integral refinado, a un problema de Stefan a una fase con conductividad térmica dependiente de la temperatura de la forma:

$$k(T) = \frac{\rho c}{(\beta + \delta T)^2},$$

con  $\beta$  y  $\delta$  constantes positivas y en el que se asume una condición de temperatura o de tipo Dirichlet en el borde fijo  $x = 0$ . También, se comparan las soluciones aproximadas dadas en forma explícita con la solución exacta del problema de Stefan que fue obtenida en [147], analizando el error cometido en cada caso.

## 5.1. Soluciones aproximadas de un problema de Stefan a una fase con condición convectiva en el borde fijo

Se considera un problema de Stefan unidimensional a una fase para la fusión de un material semi-infinito  $x > 0$ , donde se impone una condición convectiva en el borde fijo  $x = 0$ , el cual puede formularse matemáticamente de la siguiente manera:

**Problema (P):** Hallar la temperatura  $T = T(x, t)$  en la región líquida  $0 < x < s(t)$ ,

$t > 0$  y la ubicación de la frontera libre  $x = s(t)$ ,  $t \geq 0$  tal que:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (5.1)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{h}{\sqrt{t}} (T(0, t) - T_0), \quad t > 0, \quad (5.2)$$

$$T(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (5.3)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) = -\rho \ell \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (5.4)$$

$$s(0) = 0, \quad (5.5)$$

donde la conductividad térmica  $k$ , la densidad de masa  $\rho$ , el calor específico  $c$  y el calor latente por unidad de masa  $\ell$  son constantes positivas. La condición (5.2) representa la condición de convección en el borde fijo  $x = 0$  donde  $T_0 > 0$  es la temperatura ambiente y  $h > 0$  es el coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo  $x = 0$ .

La solución analítica para el problema (P), usando la técnica de similaridad, se obtuvo en [185] y para el caso de una fase está dada por:

$$T(x, t) = AT_0 + BT_0 \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right), \quad 0 \leq x \leq s(t), \quad t > 0, \quad (5.6)$$

$$s(t) = 2\xi\sqrt{\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad (5.7)$$

siendo  $\alpha = a^2 = \frac{k}{\rho c}$  el coeficiente de difusión, donde las constantes  $A$  y  $B$  están definidas por:

$$A = \frac{\operatorname{erf}(\xi)}{\frac{1}{\operatorname{Bi}\sqrt{\pi}} + \operatorname{erf}(\xi)}, \quad (5.8)$$

$$B = \frac{-1}{\frac{1}{\operatorname{Bi}\sqrt{\pi}} + \operatorname{erf}(\xi)}, \quad (5.9)$$

y el coeficiente adimensional  $\xi$  es la única solución positiva de la siguiente ecuación:

$$z \exp(z^2) \left( \operatorname{erf}(z) + \frac{1}{\operatorname{Bi}\sqrt{\pi}} \right) - \frac{\operatorname{Ste}}{\sqrt{\pi}} = 0, \quad z > 0, \quad (5.10)$$

siendo los parámetros adimensionales definidos por:

$$\operatorname{Ste} = \frac{cT_0}{\ell} \quad \text{y} \quad \operatorname{Bi} = \frac{h\sqrt{\alpha}}{k}, \quad (5.11)$$

el número de Stefan y el número de Biot generalizado, respectivamente.

En esta sección, se obtienen soluciones aproximadas del problema (P) que surgen de aplicar el método de balance integral y dos variantes del mismo.

Como se vió en el Capítulo 1 de esta Tesis:

Si se deriva la condición (5.3) con respecto a  $t$ , se despeja  $\dot{s}(t)$  y se la reemplaza en la condición de Stefan (5.4) se obtiene la nueva condición:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 (s(t), t) = \frac{\ell}{c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} (s(t), t), \quad t > 0. \quad (5.12)$$

Al integrar la ecuación del calor (5.1) con respecto a  $x$  en  $(0, s(t))$ , usando (5.3) y (5.4), se obtiene la condición integral:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} T(x, t) dx = -\frac{k}{\rho c} \left[ \frac{\rho \ell}{k} \dot{s}(t) + \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \right], \quad t > 0. \quad (5.13)$$

Por último, si a la ecuación (5.1) se la integra respecto de  $\xi$  entre 0 y  $x$ , y a esta última se la integra con respecto a  $x$  entre 0 y  $s(t)$ , se obtiene la nueva condición integral:

$$\int_0^{s(t)} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t}(\xi, t) d\xi dx = -\frac{k}{\rho c} \left[ T(0, t) + \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) s(t) \right], \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0. \quad (5.14)$$

Se prueba la existencia y unicidad de solución de cada uno de los siguientes problemas aproximados que surgen de aplicar el método de balance integral clásico, el método de balance integral modificado y el método de balance integral refinado al problema (P):

† Problema (P<sub>1</sub>): aplicando el método de balance integral clásico queda definido por (5.2), (5.3), (5.5), (5.12) y (5.13).

† Problema (P<sub>2</sub>): aplicando el método de balance integral modificado queda definido por (5.2)-(5.5) y (5.13).

† Problema (P<sub>3</sub>): aplicando el método de balance integral refinado queda definido por (5.2)-(5.5) y (5.14).

Para la resolución de los problemas (P<sub>*i*</sub>) con  $i = 1, 2, 3$ , se propone un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial dado por:

$$\tilde{T}(x, t) = \tilde{A}T_0 \left( 1 - \frac{x}{\tilde{s}(t)} \right) + \tilde{B}T_0 \left( 1 - \frac{x}{\tilde{s}(t)} \right)^2, \quad 0 < x < \tilde{s}(t), \quad t > 0, \quad (5.15)$$

donde por las características del problema (P), como se vió en el Capítulo 1 de esta Tesis, las constantes a determinar  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  se asumen positivas y la frontera libre  $x = \tilde{s}(t)$  resulta ser de la forma

$$\tilde{s}(t) = 2\tilde{\xi}\sqrt{at}, \quad t > 0, \quad (5.16)$$

siendo  $\tilde{\xi} > 0$  un parámetro adimensional desconocido a determinar.

Además, se estudian los casos límite de las soluciones aproximadas obtenidas cuando  $h \rightarrow +\infty$ , recuperando las soluciones aproximadas cuando se impone una condición de temperatura en el borde fijo  $x = 0$ .

Por último, se comparan las soluciones aproximadas de los problemas (P<sub>*i*</sub>),  $i = 1, 2, 3$  con la solución exacta del problema de Stefan (P) y se analiza el error cometido en cada caso.

### 5.1.1. Solución del problema aproximado aplicando el método de balance integral clásico

El método del balance integral clásico para resolver el problema (P) propone la resolución de un problema aproximado definido de la siguiente manera:

**Problema (P<sub>1</sub>):** Hallar la temperatura  $T_1 = T_1(x, t)$  en la región líquida  $0 < x < s_1(t)$ ,  $t > 0$  y la ubicación de la frontera libre  $x = s_1(t)$  con  $t \geq 0$ , tal que se verifiquen las condiciones (5.2), (5.3), (5.5), (5.12) y (5.13).

Proponiendo el siguiente perfil cuadrático de temperatura en el espacio:

$$T_1(x, t) = A_1 T_0 \left(1 - \frac{x}{s_1(t)}\right) + B_1 T_0 \left(1 - \frac{x}{s_1(t)}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq s_1(t), \quad t > 0, \quad (5.17)$$

la frontera libre toma la forma:

$$s_1(t) = 2\xi_1 \sqrt{\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad (5.18)$$

donde las constantes  $A_1$ ,  $B_1$  y  $\xi_1$  se determinarán a partir de las condiciones (5.2), (5.12) y (5.13).

Las condiciones (5.3) y (5.5) se cumplen inmediatamente. Dado que

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}(0, t) = -\frac{T_0}{2\xi_1 \sqrt{\alpha t}} (A_1 + 2B_1),$$

de la condición (5.2) se tiene

$$-\frac{(A_1 + 2B_1)}{2\xi_1} = \frac{h\sqrt{\alpha}}{k} (A_1 + B_1 - 1),$$

o equivalentemente

$$(1 + 2\text{Bi } \xi_1) A_1 + (2 + 2\text{Bi } \xi_1) B_1 = 2\text{Bi } \xi_1. \quad (5.19)$$

Además, como

$$\frac{d}{dt} \int_0^{s_1(t)} T_1(x, t) dx = T_0 \left(\frac{A_1}{2} + \frac{B_1}{3}\right) \sqrt{\frac{\alpha}{t}} \xi_1,$$

de la condición (5.13), resulta

$$\left(\frac{A_1}{2} + \frac{B_1}{3}\right) \xi_1 = -\frac{\ell}{cT_0} \xi_1 + \frac{A_1 + 2B_1}{2\xi_1},$$

es decir

$$(\xi_1^2 - 1) A_1 + \left(\frac{2}{3}\xi_1^2 - 2\right) B_1 = -\frac{2}{\text{Ste}} \xi_1^2. \quad (5.20)$$

Luego, de (5.19) y (5.20), se obtiene:

$$A_1 = \frac{6\text{Ste} - (6 + 2\text{Ste}) \xi_1^2 - \frac{6}{\text{Bi}} \xi_1}{\text{Ste} \left(\xi_1^2 + \frac{2}{\text{Bi}} \xi_1 + 3\right)}, \quad (5.21)$$

$$B_1 = \frac{(3\text{Ste} + 6)\xi_1^2 + \frac{3}{\text{Bi}}\xi_1 - 3\text{Ste}}{\text{Ste}(\xi_1^2 + \frac{2}{\text{Bi}}\xi_1 + 3)}. \quad (5.22)$$

Del hecho de que  $A_1 > 0$  y  $B_1 > 0$  se tiene que  $0 < \xi_1 < \xi_1^{\text{máx}}$  y  $\xi_1 > \xi_1^{\text{mín}} > 0$ , respectivamente donde:

$$\xi_1^{\text{mín}} = \frac{\sqrt{\Delta^{\text{mín}}} - \frac{1}{\text{Bi}}}{2(2 + \text{Ste})}, \quad \xi_1^{\text{máx}} = \frac{\sqrt{\Delta^{\text{máx}}} - \frac{3}{\text{Bi}}}{2(3 + \text{Ste})}, \quad (5.23)$$

con

$$\Delta^{\text{mín}} = 4\text{Ste}^2 + 8\text{Ste} + \frac{1}{\text{Bi}^2}, \quad \Delta^{\text{máx}} = 12\text{Ste}^2 + 36\text{Ste} + \frac{9}{\text{Bi}^2}. \quad (5.24)$$

Se tiene que  $\xi_1^{\text{mín}} < \xi_1^{\text{máx}}$ . De hecho:

$$\begin{aligned} \xi_1^{\text{máx}} - \xi_1^{\text{mín}} > 0 &\Leftrightarrow (2 + \text{Ste})\text{Bi}\sqrt{\Delta^{\text{máx}}} - (3 + \text{Ste})\text{Bi}\sqrt{\Delta^{\text{mín}}} > 3 + 2\text{Ste} > 0 \\ &\Leftrightarrow [(2 + \text{Ste})^2\text{Bi}^2\Delta^{\text{máx}} + (3 + \text{Ste})^2\text{Bi}^2\Delta^{\text{mín}} - (3 + 2\text{Ste})^2]^2 \\ &\quad - 4(2 + \text{Ste})^2(3 + \text{Ste})^2\text{Bi}^4\Delta^{\text{mín}}\Delta^{\text{máx}} > 0 \\ &\Leftrightarrow 16\text{Bi}^4\text{Ste}^2(2\text{Ste}^3 + 12\text{Ste}^2 + 27\text{Ste} + 18)^2 > 0, \end{aligned}$$

que se verifica inmediatamente.

Como:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}(s_1(t), t) = -\frac{A_1 T_0}{2\xi_1 \sqrt{\alpha t}}, \quad \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}(s_1(t), t) = \frac{B_1 T_0}{2\xi_1^2 \alpha t},$$

de la condición (5.12) resulta

$$A_1^2 = \frac{2}{\text{Ste}} B_1,$$

y al sustituir los valores de  $A_1$  y  $B_1$  dados por (5.21) y (5.22) en la expresión anterior, se tiene:

$$\frac{(6\text{Ste} - (6 + 2\text{Ste})\xi_1^2 - \frac{6}{\text{Bi}}\xi_1)^2}{2\xi_1^2 + \frac{4}{\text{Bi}}\xi_1 + 6} = (3\text{Ste} + 6)\xi_1^2 + \frac{3}{\text{Bi}}\xi_1 - 3\text{Ste},$$

de donde sigue que  $\xi_1$  debe ser una solución positiva de la ecuación polinómica de cuarto grado:

$$\begin{aligned} (12 + 9\text{Ste} + 2\text{Ste}^2)z^4 + \frac{21+6\text{Ste}}{\text{Bi}}z^3 + \left(\frac{12}{\text{Bi}^2} - 42\text{Ste} - 12\text{Ste}^2 - 18\right)z^2 + \\ -\frac{30\text{Ste}+9}{\text{Bi}}z + 9\text{Ste}(1 + 2\text{Ste}) = 0, \quad 0 < \xi_1^{\text{mín}} < z < \xi_1^{\text{máx}}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Sea la función polinómica  $p_1 = p_1(z)$  definida por el lado izquierdo de la ecuación (5.25). Así, el problema se reduce a estudiar la existencia de raíces de  $p_1$  en el intervalo deseado  $(\xi_1^{\text{mín}}, \xi_1^{\text{máx}})$ .

La regla de los signos de Descartes establece que si los términos de un polinomio de una sola variable con coeficientes reales se ordenan por exponente a variable descendente, entonces el número de raíces positivas del polinomio es igual al número de diferencias de signo entre coeficientes consecutivos distintos de cero, o es menor que ella por un número par. Por lo tanto, en este caso se puede asegurar que  $p_1$  puede tener como máximo dos raíces en  $\mathbb{R}^+$ .

Para probar que al menos una de estas dos raíces positivas pertenece al rango requerido,  $(\xi_1^{\min}, \xi_1^{\max})$ , se estudia el signo de  $p_1$  en los extremos del intervalo.

Por un lado se tiene que:

$$p_1(\xi^{\min}) = -Q_1\sqrt{\Delta^{\min}} + Q_2 ,$$

donde

$$Q_1 = \frac{(2\text{Ste} + 3)^2 (2\text{Bi}^2(\text{Ste}^2 + 2\text{Ste}) + 1)}{\text{Bi}^3(2 + \text{Ste})^4} ,$$

$$Q_2 = \frac{(2\text{Ste} + 3)^2 ((2\text{Ste}^4 + 8\text{Ste}^3 + 8\text{Ste}^2) \text{Bi}^4 + (4\text{Ste}^2 + 8\text{Ste}) \text{Bi}^2 + 1)}{\text{Bi}^4(2 + \text{Ste})^4} .$$

Es claro que  $Q_1 > 0$  y  $Q_2 > 0$ . Por lo tanto:

$$p_1(\xi^{\min}) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q_2^2 - Q_1^2\Delta^{\min} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1024 \text{Ste}^4 (2\text{Ste}^2 + 7\text{Ste} + 6)^4 > 0 ,$$

que se verifica inmediatamente.

Por otro lado:

$$p_1(\xi^{\max}) = Q_3\sqrt{\Delta^{\max}} + Q_4 ,$$

donde

$$Q_3 = -\frac{3(2\text{Ste} + 3)^2 (\text{Bi}^2 (\text{Ste}^2 - 9) + 3)}{2\text{Bi}^3(3 + \text{Ste})^4} ,$$

$$Q_4 = -\frac{9}{2}(2\text{Ste} + 3)^2 [2\text{Bi}^4\text{Ste}^3 + 3\text{Bi}^2(4\text{Bi}^2 - 1)\text{Ste}^2 + 6\text{Bi}^2(3\text{Bi}^2 - 1)\text{Ste} + 3(3\text{Bi}^2 - 1)] \text{Bi}^{-4}(3 + \text{Ste})^{-4} .$$

Si se calcula:

$$Q_4^2 - \Delta^{\max}Q_3^2 = 6912\text{Ste}^2(3\text{Bi}^2 - 1)(2\text{Ste}^2 + 9\text{Ste} + 9)^4 ,$$

es claro que se cumplen las siguientes propiedades:

a. Si  $\text{Bi} < \frac{\sqrt{3}}{3}$  entonces:

i)  $Q_3 < 0, \quad \forall \text{Ste} > 0.$

ii)  $Q_4^2 - \Delta^{\max}Q_3^2 < 0, \quad \forall \text{Ste} > 0.$

b. Si  $\text{Bi} > \frac{\sqrt{3}}{3}$  entonces:

i)  $Q_3 > 0$  si  $\text{Ste} < \sqrt{9 - \frac{3}{\text{Bi}^2}}$  y  $Q_3 < 0$  si  $\text{Ste} > \sqrt{9 - \frac{3}{\text{Bi}^2}}$ .

ii)  $Q_4 < 0, \quad \forall \text{Ste} > 0.$

iii)  $Q_4^2 - \Delta^{\max}Q_3^2 > 0, \quad \forall \text{Ste} > 0.$

c. Si  $\text{Bi} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  entonces:

i)  $Q_3 < 0, \quad \forall \text{Ste} > 0.$



ii)  $Q_4 < 0, \quad \forall \text{Ste} > 0.$

Entonces, se demostrará que  $p_1(\xi^{\text{máx}}) < 0, \forall \text{Ste} > 0, \forall \text{Bi} > 0.$

En el caso  $\text{Bi} < \frac{\sqrt{3}}{3}$ , se tiene de la propiedad a. i) que  $Q_3 < 0.$  Si  $Q_4 \leq 0$ , entonces  $p_1(\xi^{\text{máx}}) < 0$  se cumple inmediatamente. Si  $Q_4 > 0$  entonces

$$\begin{aligned} p_1(\xi^{\text{máx}}) < 0 &\Leftrightarrow Q_3\sqrt{\Delta^{\text{máx}}} + Q_4 < 0 \\ &\Leftrightarrow Q_3\sqrt{\Delta^{\text{máx}}} < -Q_4 < 0 \\ &\Leftrightarrow Q_4^2 - \Delta^{\text{máx}}Q_3^2 < 0, \end{aligned}$$

lo cual se verifica inmediatamente a partir de la propiedad a. ii).

En el caso  $\text{Bi} > \frac{\sqrt{3}}{3}$ , se tiene de la propiedad b. ii)  $Q_4 < 0.$  Si  $Q_3 \leq 0$ , entonces  $p_1(\xi^{\text{máx}}) < 0$  se cumple inmediatamente. Si  $Q_3 > 0$  entonces

$$\begin{aligned} p_1(\xi^{\text{máx}}) < 0 &\Leftrightarrow Q_3\sqrt{\Delta^{\text{máx}}} + Q_4 < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < Q_3\sqrt{\Delta^{\text{máx}}} < -Q_4 \\ &\Leftrightarrow Q_4^2 - \Delta^{\text{máx}}Q_3^2 > 0, \end{aligned}$$

lo cual se verifica inmediatamente a partir de la propiedad b. iii).

En el caso  $\text{Bi} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , se tiene de las propiedades c. i) y c. ii) que  $Q_3 < 0$  y  $Q_4 < 0$  lo que obviamente implica que  $p_1(\xi^{\text{máx}}) < 0.$

Se ha probado entonces que  $p_1(\xi^{\text{mín}}) > 0$  y  $p_1(\xi^{\text{máx}}) < 0, \forall \text{Ste} > 0, \forall \text{Bi} > 0.$  Además, del hecho de que  $p_1$  tiene como máximo dos raíces en  $\mathbb{R}^+$  y  $p_1(+\infty) = +\infty$ , se concluye que  $p_1$  tiene exactamente una raíz en el intervalo  $(\xi^{\text{mín}}, \xi^{\text{máx}}).$  Así, se ha demostrado el siguiente resultado:

**Teorema 5.1.** *La única solución del problema  $(P_1)$ , para un perfil cuadrático en la variable espacial, está dada por (5.17)-(5.18), donde las constantes positivas  $A_1$  y  $B_1$  están definidas por (5.21) y (5.22), respectivamente, y  $\xi_1 > 0$  es la única solución de la ecuación polinómica (5.25) donde  $\xi^{\text{mín}}$  y  $\xi^{\text{máx}}$  se definen en (5.23).*

### 5.1.2. Solución del problema aproximado aplicando el método de balance integral modificado

Un método alternativo para resolver el problema (P) es el método de balance integral modificado en el que se propone la resolución del problema aproximado definido de la siguiente manera:

**Problema  $(P_2)$ :** Hallar la temperatura  $T_2 = T_2(x, t)$  en la región líquida  $0 < x < s_2(t)$ ,  $t > 0$  y la posición de la frontera libre  $x = s_2(t)$  con  $t \geq 0$ , tal que se verifiquen las condiciones (5.2)-(5.5) y (5.13).

Para un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial:

$$T_2(x, t) = A_2T_0 \left(1 - \frac{x}{s_2(t)}\right) + B_2T_0 \left(1 - \frac{x}{s_2(t)}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq s_2(t), \quad t > 0, \quad (5.26)$$

la frontera libre está dada por:

$$s_2(t) = 2\xi_2\sqrt{\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad (5.27)$$

donde las constantes  $A_2, B_2$  y  $\xi_2$  se determinan a partir de las condiciones (5.2), (5.4) y (5.13).

Las condiciones (5.3) y (5.5) se cumplen inmediatamente.

Como en la Sección 5.1.1, de las condiciones (5.2) y (5.13), se obtienen

$$A_2 = \frac{6\text{Ste} - (6 + 2\text{Ste})\xi_2^2 - \frac{6}{\text{Bi}}\xi_2}{\text{Ste}(\xi_2^2 + \frac{2}{\text{Bi}}\xi_2 + 3)}, \quad (5.28)$$

$$B_2 = \frac{(3\text{Ste} + 6)\xi_2^2 + \frac{3}{\text{Bi}}\xi_2 - 3\text{Ste}}{\text{Ste}(\xi_2^2 + \frac{2}{\text{Bi}}\xi_2 + 3)}. \quad (5.29)$$

Como  $A_2$  y  $B_2$  deben ser constantes positivas entonces, como en el problema  $(P_1)$ , se tiene que  $0 < \xi^{\min} < \xi_2 < \xi^{\max}$  donde  $\xi^{\min}$  y  $\xi^{\max}$  están definidos por (5.23).

Las constantes  $A_2$  y  $B_2$ , se expresan en función de los parámetros  $\xi_2, \text{Bi}$  y  $\text{Ste}$ .

Dado que

$$\frac{\partial T_2}{\partial x}(s_2(t), t) = -\frac{A_2 T_0}{2\xi_2\sqrt{\alpha t}},$$

y usando la condición (5.4), el coeficiente  $\xi_2$  verifica

$$\frac{6\text{Ste} - (6 + 2\text{Ste})\xi_2^2 - \frac{6}{\text{Bi}}\xi_2}{\xi_2^2 + \frac{2}{\text{Bi}}\xi_2 + 3} = 2\xi_2^2,$$

por lo tanto  $\xi_2$  es una solución positiva de la ecuación polinómica de cuarto grado dada por:

$$z^4 + \frac{2}{\text{Bi}}z^3 + (6 + \text{Ste})z^2 + \frac{3}{\text{Bi}}z - 3\text{Ste} = 0, \quad 0 < \xi^{\min} < z < \xi^{\max}. \quad (5.30)$$

Nótese que la función polinómica  $p_2 = p_2(z)$  definida por el lado izquierdo de la ecuación (5.30) es una función creciente en  $\mathbb{R}^+$  y verifica  $p_2(0) = -3\text{Ste} < 0$ ,  $p_2(+\infty) = +\infty$ . Por lo tanto,  $p_2$  tiene una única raíz en  $\mathbb{R}^+$ .

Si se analiza el comportamiento de  $p_2$  en el intervalo  $(\xi^{\min}, \xi^{\max})$  se puede observar que:

$$p_2(\xi^{\min}) = R_1\sqrt{\Delta^{\min}} - R_2,$$

donde  $\Delta^{\min}$  está definido por la ecuación (5.24),

$$R_1 = \frac{(2\text{Ste} + 3)(2\text{Bi}^2\text{Ste}^2 + 4\text{Bi}^2\text{Ste} + 1)}{2\text{Bi}^3(2 + \text{Ste})^4} > 0,$$

$$R_2 = \left( \frac{\text{Ste}^2(2\text{Ste} + 3)}{(2 + \text{Ste})^2} + \frac{2\text{Ste}(2\text{Ste}^2 + 7\text{Ste} + 6)}{\text{Bi}^2(2 + \text{Ste})^4} + \frac{2\text{Ste} + 3}{2\text{Bi}^4(2 + \text{Ste})^4} \right) > 0,$$

luego

$$p_2(\xi^{\min}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_2^2 - R_1^2\Delta^{\min} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 256 \text{Ste}^4(2\text{Ste} + 3)^2(\text{Ste} + 2)^4 > 0,$$

que se satisface inmediatamente.

También,  $p_2(z) > \widehat{p}_2(z)$  para todo  $z \in \mathbb{R}^+$ , donde  $\widehat{p}_2(z) = (6 + \text{Ste})z^2 + \frac{3}{\text{Bi}}z - 3\text{Ste}$ . Además:

$$\widehat{p}_2(\xi^{\text{máx}}) = -R_3\sqrt{\Delta^{\text{máx}}} + R_4,$$

donde  $\Delta^{\text{máx}}$  se define mediante la ecuación (5.24) y

$$R_3 = \frac{9}{2\text{Bi}(3 + \text{Ste})^2} > 0,$$

$$R_4 = \frac{9\text{Ste}}{(3 + \text{Ste})} + \frac{27}{2\text{Bi}^2(3 + \text{Ste})^2} > 0.$$

Entonces,

$$p_2(\xi^{\text{máx}}) > \widehat{p}_2(\xi^{\text{máx}}) > 0 \Leftrightarrow R_4^2 - R_3^2\Delta^{\text{máx}} > 0 \Leftrightarrow 1296 \text{Ste}^2(\text{Ste} + 3)^2 > 0,$$

que se verifica inmediatamente. Luego, la ecuación (5.30) tiene única solución  $\xi_2$  en el intervalo  $(\xi^{\text{mín}}, \xi^{\text{máx}})$ . Por lo tanto, se ha demostrado el siguiente resultado:

**Teorema 5.2.** *La única solución del problema (P<sub>2</sub>), para un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial, está dada por (5.26)-(5.27), donde las constantes positivas A<sub>2</sub> y B<sub>2</sub> están definidas por (5.28) y (5.29), respectivamente, y  $\xi_2 > 0$  es la única solución de la ecuación polinómica (5.30) donde  $\xi^{\text{mín}}$  y  $\xi^{\text{máx}}$  se definen en (5.23).*

### 5.1.3. Solución del problema aproximado aplicando el método de balance integral refinado

El método de balance integral refinado para resolver el problema (P), propone la resolución de un problema aproximado formulado de la siguiente manera:

**Problema (P<sub>3</sub>):** Hallar la temperatura  $T_3 = T_3(x, t)$  en la región líquida  $0 < x < s_3(t)$ ,  $t > 0$  y la posición de la frontera libre  $x = s_3(t)$  con  $t \geq 0$  tal que se verifiquen las condiciones (5.2)-(5.5) y (5.14).

Para un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial dado por:

$$T_3(x, t) = A_3T_0 \left(1 - \frac{x}{s_3(t)}\right) + B_3T_0 \left(1 - \frac{x}{s_3(t)}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq s_3(t), \quad t > 0, \quad (5.31)$$

la frontera libre toma la forma:

$$s_3(t) = 2\xi_3\sqrt{\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad (5.32)$$

por lo que las condiciones (5.3) y (5.5) se cumplen inmediatamente y las constantes  $A_3$ ,  $B_3$  y  $\xi_3$  se determinan a partir de las condiciones (5.2), (5.4) y (5.14).

De manera similar a lo realizado en la Sección 5.1.1, del hecho que:

$$\int_0^{s_3(t)} \int_0^x \frac{\partial T_3}{\partial t}(\xi, t) d\xi dx = \frac{T_0(A_3 + B_3)\alpha}{3} \xi_3^2,$$

y de las condiciones (5.2), (5.14) se obtiene:

$$A_3 = \frac{2\xi_3(3 - \xi_3^2)}{\frac{1}{\text{Bi}}\xi_3^2 + 6\xi_3 + \frac{3}{\text{Bi}}}, \quad (5.33)$$

$$B_3 = \frac{2\xi_3^3}{\frac{1}{\text{Bi}}\xi_3^2 + 6\xi_3 + \frac{3}{\text{Bi}}}. \quad (5.34)$$

Como  $A_3$  y  $B_3$  deben ser positivas entonces  $0 < \xi_3 < \sqrt{3}$ . Por otro lado, dado que  $A_3$  y  $B_3$  se definen a partir de los parámetros  $\xi_3$  y Bi, la condición (5.4) se utiliza para encontrar el valor de  $\xi_3$ . De esta forma resulta que  $\xi_3$  es una solución positiva de la ecuación polinómica de tercer grado

$$\frac{1}{\text{Bi}}z^3 + (6 + \text{Ste})z^2 + \frac{3}{\text{Bi}}z - 3\text{Ste} = 0, \quad 0 < z < \sqrt{3}. \quad (5.35)$$

Es claro que la función polinómica  $p_3 = p_3(z)$  definida por el lado izquierdo de la ecuación (5.35) tiene una única raíz en  $\mathbb{R}^+$ . Además, como

$$p_3(0) = -3\text{Ste} < 0, \quad p_3(\sqrt{3}) = \frac{6\sqrt{3}}{\text{Bi}} + 18 > 0,$$

se puede asegurar que la única solución positiva  $\xi_3$  de la ecuación (5.35) pertenece al intervalo  $(0, \sqrt{3})$ . Por lo tanto, se ha probado el siguiente teorema:

**Teorema 5.3.** *La única solución del problema (P<sub>3</sub>), para un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial, está dada por (5.31)-(5.32), donde las constantes positivas  $A_3$  y  $B_3$  están definidas por (5.33) y (5.34), respectivamente, y  $\xi_3 > 0$  es la única solución de la ecuación polinómica (5.35).*

#### 5.1.4. Comportamiento asintótico

En el problema (P), se impone una condición de frontera convectiva (5.2) caracterizada por el coeficiente  $h$  en el borde fijo  $x = 0$ . Esta condición constituye una generalización de la condición de tipo Dirichlet en el sentido de que si se toma el límite cuando  $h \rightarrow +\infty$  se obtiene  $T(0, t) = T_0$ . De (5.11), estudiar el comportamiento límite de la solución del problema cuando  $h \rightarrow +\infty$  es equivalente a estudiar el caso cuando  $\text{Bi} \rightarrow +\infty$ .

En [185] se demostró que la solución al problema (P) cuando  $h$ , y por tanto Bi, tiende a infinito converge a la solución del siguiente problema:

**Problema (P<sub>∞</sub>):** Hallar la temperatura  $T_\infty = T_\infty(x, t)$  en la región líquida  $0 < x < s_\infty(t)$ ,  $t > 0$  y la ubicación de la frontera libre  $x = s_\infty(t)$ ,  $t \geq 0$  tal que:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (5.36)$$

$$T(0, t) = T_0 > 0, \quad t > 0, \quad (5.37)$$

$$T(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (5.38)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) = -\rho l \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (5.39)$$

$$s(0) = 0. \quad (5.40)$$

cuya solución exacta, usando la variable de similaridad,  $\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$ , se obtiene en [2,130,184] y está dada por:

$$T_\infty(x, t) = T_0 - \frac{T_0}{\operatorname{erf}(\xi_\infty)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right), \quad 0 \leq x \leq s_\infty(t), \quad t > 0, \quad (5.41)$$

$$s_\infty(t) = 2\xi_\infty\sqrt{\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad (5.42)$$

donde  $\xi_\infty$  es la única solución positiva de la ecuación:

$$z \exp(z^2) \operatorname{erf}(z) = \frac{\operatorname{Ste}}{\sqrt{\pi}}, \quad z > 0. \quad (5.43)$$

Notar que la solución  $(T, s)$  del problema (P) dada por (5.6)-(5.7), depende de los parámetros  $\xi, A$  y  $B$  que a su vez dependen de los parámetros  $\operatorname{Ste}$  y  $\operatorname{Bi}$ . Por tanto, por “convergencia” de la solución de (P) a la solución de  $(P_\infty)$  se entiende que: para cada  $\operatorname{Ste} > 0$ ,  $x > 0$  y  $t > 0$ , fijos:  $\xi = \xi(\operatorname{Bi}) \rightarrow \xi_\infty$ ,  $A = A(\operatorname{Bi}) \rightarrow A_\infty$ ,  $B = B(\operatorname{Bi}) \rightarrow B_\infty$  cuando  $\operatorname{Bi} \rightarrow +\infty$ . De esta manera resulta que

$$T(x, t) = T(x, t, \operatorname{Bi}) \rightarrow T_\infty(x, t), \quad s(t) = s(t, \operatorname{Bi}) \rightarrow s_\infty(t),$$

se verifican inmediatamente cuando  $\operatorname{Bi} \rightarrow +\infty$ .

Motivado por las ideas anteriores, en este apartado se realiza un análisis del comportamiento límite de la solución de cada problema aproximado  $(P_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  cuando  $\operatorname{Bi}$  tiende a infinito. Se probará que la solución de cada  $(P_i)$  converge a la solución de un nuevo problema  $(P_{i\infty})$  que se define a partir de  $(P_i)$  para cada  $i = 1, 2, 3$  cambiando la condición de frontera convectiva (5.2), por una condición de tipo Dirichlet (5.37) en el borde fijo  $x = 0$ .

**Problema  $(P_{1\infty})$ :** Hallar la temperatura  $T_{1\infty} = T_{1\infty}(x, t)$ ,  $0 < x < s_{1\infty}(t)$ ,  $t > 0$  en la región líquida y la ubicación de la frontera libre  $x = s_{1\infty}(t)$ ,  $t \geq 0$  tal que se verifiquen las condiciones (5.12), (5.13), (5.37), (5.38) y (5.40).

La solución al problema  $(P_{1\infty})$  obtenida en [96] para un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial está dada por:

$$T_{1\infty}(x, t) = A_{1\infty}T_0 \left(1 - \frac{x}{s_{1\infty}(t)}\right) + B_{1\infty}T_0 \left(1 - \frac{x}{s_{1\infty}(t)}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq s_{1\infty}(t), \quad t > 0, \quad (5.44)$$

$$s_{1\infty}(t) = 2\xi_{1\infty}\sqrt{\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad (5.45)$$

donde las constantes  $A_{1\infty}$  y  $B_{1\infty}$  vienen dadas por:

$$A_{1\infty} = \frac{6\operatorname{Ste} - (6 + 2\operatorname{Ste})\xi_{1\infty}^2}{\operatorname{Ste}(\xi_{1\infty}^2 + 3)}, \quad B_{1\infty} = \frac{(3\operatorname{Ste} + 6)\xi_{1\infty}^2 - 3\operatorname{Ste}}{\operatorname{Ste}(\xi_{1\infty}^2 + 3)}. \quad (5.46)$$

Para que  $A_{1\infty}$  y  $B_{1\infty}$  sean positivos es necesario que  $0 < \xi_\infty^{\min} < \xi_{1\infty} < \xi_\infty^{\max}$  donde:

$$\xi_\infty^{\min} = \sqrt{\frac{\operatorname{Ste}}{2 + \operatorname{Ste}}} \quad \text{y} \quad \xi_\infty^{\max} = \sqrt{\frac{3\operatorname{Ste}}{3 + \operatorname{Ste}}}, \quad (5.47)$$

entonces  $\xi_{1\infty}$  debe ser una solución positiva de la ecuación polinómica de cuarto grado:

$$(12 + 9\operatorname{Ste} + 2\operatorname{Ste}^2)z^4 - (42\operatorname{Ste} + 12\operatorname{Ste}^2 + 18)z^2 + 9\operatorname{Ste}(1 + 2\operatorname{Ste}) = 0, \quad \xi_\infty^{\min} < z < \xi_\infty^{\max}. \quad (5.48)$$

Si se define  $p_{1\infty} = p_{1\infty}(z)$  el lado izquierdo de la ecuación (5.48), se obtiene:

$$p_{1\infty}(\xi_{\infty}^{\min}) = \frac{2\text{Ste}^2(2\text{Ste} + 3)^2}{(\text{Ste} + 2)^2} > 0, \quad p_{1\infty}(\xi_{\infty}^{\max}) = \frac{-9\text{Ste}(2\text{Ste} + 3)^2}{(\text{Ste} + 3)^2} < 0.$$

Como (5.48) tiene exactamente dos soluciones positivas y  $p_{1\infty}(+\infty) = +\infty$ , se puede asegurar que existe una y sólo una raíz de  $p_{1\infty}$  en el intervalo  $(\xi_{\infty}^{\min}, \xi_{\infty}^{\max})$  y está dada por:

$$\xi_{1\infty} = \left( \frac{3(1 + 2\text{Ste} - \sqrt{1 + 2\text{Ste}})}{5 + 2\text{Ste} + \sqrt{1 + 2\text{Ste}}} \right)^{1/2}. \quad (5.49)$$

Además, este valor obtenido de  $\xi_{1\infty}$  permite definir  $A_{1\infty}$  y  $B_{1\infty}$  de forma explícita como:

$$A_{1\infty} = \frac{\sqrt{2\text{Ste} + 1} - 1}{\text{Ste}}, \quad B_{1\infty} = 1 + \frac{1 - \sqrt{2\text{Ste} + 1}}{\text{Ste}}. \quad (5.50)$$

La solución  $(T_1, s_1)$  del problema  $(P_1)$  dada por (5.6)-(5.7), depende de los parámetros  $\xi_1$ ,  $A_1$  y  $B_1$  que a su vez dependen de los parámetros  $\text{Ste}$  y  $\text{Bi}$ . Por lo tanto, para probar la convergencia de la única solución de  $(P_1)$  a la única solución de  $(P_{1\infty})$  cuando  $\text{Bi} \rightarrow +\infty$ , se denotará:

$$T_1(x, t) = T_1(x, t, \text{Bi}), \quad A_1 = A_1(\text{Bi}), \quad B_1 = B_1(\text{Bi}), \quad s_1(t) = s_1(t, \text{Bi}) \quad \text{y} \quad \xi_1 = \xi_1(\text{Bi}).$$

Por convergencia se entenderá que para cada valor de  $\text{Ste} > 0$  fijo y  $0 < x < s_{1\infty}(t)$ ,  $t > 0$ :

$$T_1(x, t, \text{Bi}) \rightarrow T_{1\infty}(x, t), \quad s_1(t, \text{Bi}) \rightarrow s_{1\infty}(t) \quad \text{cuando} \quad \text{Bi} \rightarrow +\infty.$$

**Teorema 5.4.** *La solución del problema  $(P_1)$  converge a la solución del problema  $(P_{1\infty})$  cuando  $\text{Bi} \rightarrow +\infty$ .*

*Demostración.* Del problema  $(P_1)$ , si se fija  $\text{Ste} > 0$ , se sabe que  $\xi_1 = \xi_1(\text{Bi})$  es la única solución de la ecuación (5.25) en el intervalo  $(\xi_{\infty}^{\min}, \xi_{\infty}^{\max})$ .

Al tomar el límite cuando  $\text{Bi} \rightarrow +\infty$  se obtiene que  $\lim_{\text{Bi} \rightarrow +\infty} \xi_1(\text{Bi})$  debe ser una solución de la ecuación (5.48) en el intervalo  $(\xi_{\infty}^{\min}, \xi_{\infty}^{\max})$ . Como esta última ecuación tiene solución única dada por  $\xi_{1\infty}$  definida por (5.49) resulta  $\lim_{\text{Bi} \rightarrow +\infty} \xi_1(\text{Bi}) = \xi_{1\infty}$ . Sigue inmediatamente que  $\lim_{\text{Bi} \rightarrow +\infty} s_1(t, \text{Bi}) = s_{1\infty}(t)$ , para todo  $t \geq 0$ .

Para la convergencia de  $T_1(x, t, \text{Bi})$  se prueba mediante cálculos simples que

$$A_1(\text{Bi}) \rightarrow A_{1\infty}, \quad B_1(\text{Bi}) \rightarrow B_{1\infty},$$

cuando  $\text{Bi} \rightarrow +\infty$ . ■

**Problema  $(P_{2\infty})$ :** Hallar la temperatura  $T_{2\infty} = T_{2\infty}(x, t)$ ,  $0 < x < s_{2\infty}(t)$ ,  $t > 0$  en la región líquida y la frontera libre  $x = s_{2\infty}(t)$ ,  $t \geq 0$  tal que se verifiquen las condiciones (5.13) y (5.37)-(5.40).

La solución de este problema, obtenida en [197], para un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial, está dada por:

$$T_{2\infty}(x, t) = A_{2\infty}T_0 \left(1 - \frac{x}{s_{2\infty}(t)}\right) + B_{2\infty}T_0 \left(1 - \frac{x}{s_{2\infty}(t)}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq s_{2\infty}(t), \quad t > 0, \quad (5.51)$$

$$s_{2\infty}(t) = 2\xi_{2\infty}\sqrt{\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad (5.52)$$

donde las constantes  $A_{2\infty}$  y  $B_{2\infty}$  vienen dadas por:

$$A_{2\infty} = \frac{6\text{Ste} - (6 + 2\text{Ste})\xi_{2\infty}^2}{\text{Ste}(\xi_{2\infty}^2 + 3)}, \quad B_{2\infty} = \frac{(3\text{Ste} + 6)\xi_{2\infty}^2 - 3\text{Ste}}{\text{Ste}(\xi_{2\infty}^2 + 3)}. \quad (5.53)$$

Para que  $A_{2\infty}$  y  $B_{2\infty}$  sean positivos, es necesario que  $0 < \xi_{\infty}^{\text{mín}} < \xi_{2\infty} < \xi_{\infty}^{\text{máx}}$  donde  $\xi_{\infty}^{\text{mín}}$  y  $\xi_{\infty}^{\text{máx}}$  fueron dadas en (5.47). En consecuencia,  $\xi_{2\infty}$  debe ser una solución positiva de la ecuación polinómica de cuarto grado:

$$z^4 + (6 + \text{Ste})z^2 - 3\text{Ste} = 0, \quad 0 < \xi_{\infty}^{\text{mín}} < z < \xi_{\infty}^{\text{máx}}. \quad (5.54)$$

La función polinómica  $p_{2\infty} = p_{2\infty}(z)$  definida por el lado izquierdo de la ecuación (5.54), verifica que  $p_{2\infty}(0^+) = -3\text{Ste} < 0$ ,  $p_{2\infty}(+\infty) = +\infty$  y  $p'_{2\infty}(z) > 0$  para todo  $z \in (0, +\infty)$ , por lo que tiene una única raíz en  $\mathbb{R}^+$ . Además se tiene:

$$p_{2\infty}(\xi_{\infty}^{\text{mín}}) = \frac{-\text{Ste}^2(2\text{Ste} + 3)}{(\text{Ste} + 2)^2} < 0, \quad p_{2\infty}(\xi_{\infty}^{\text{máx}}) = \frac{9\text{Ste}(2\text{Ste} + 3)^2}{(\text{Ste} + 3)^2} > 0,$$

por lo que es posible asegurar que la única raíz positiva de  $p_{2\infty}$  se encuentra en el intervalo  $(\xi_{\infty}^{\text{mín}}, \xi_{\infty}^{\text{máx}})$  y puede obtenerse explícitamente mediante la expresión:

$$\xi_{2\infty} = \left( \frac{\sqrt{(6 + \text{Ste})^2 + 12\text{Ste}} - (6 + \text{Ste})}{2} \right)^{1/2}. \quad (5.55)$$

Luego, del valor obtenido de  $\xi_{2\infty}$ , es posible definir  $A_{2\infty}$  y  $B_{2\infty}$  también de forma explícita:

$$A_{2\infty} = -\frac{2(\text{Ste} + 3)}{\text{Ste}} + \frac{12(2\text{Ste} + 3)}{\text{Ste} \left( \sqrt{\text{Ste}^2 + 24\text{Ste} + 36} - \text{Ste} \right)}, \quad (5.56)$$

$$B_{2\infty} = \frac{3(\text{Ste} + 2)}{\text{Ste}} - \frac{12(2\text{Ste} + 3)}{\text{Ste} \left( \sqrt{\text{Ste}^2 + 24\text{Ste} + 36} - \text{Ste} \right)}. \quad (5.57)$$

El hecho de tener la solución exacta del problema  $(P_{2\infty})$ , permite probar el siguiente resultado de convergencia:

**Teorema 5.5.** *La solución al problema  $(P_2)$  converge a la solución del problema  $(P_{2\infty})$  cuando  $\text{Bi} \rightarrow +\infty$ .*

*Demostración.* Es análoga a la prueba dada en el Teorema 5.4. ■

**Problema  $(P_{3\infty})$ :** Hallar la temperatura  $T_{3\infty} = T_{3\infty}(x, t)$ ,  $0 < x < s_{3\infty}(t)$ ,  $t > 0$  en la región líquida y la ubicación de la frontera libre  $x = s_{3\infty}(t)$ ,  $t \geq 0$  tal que se verifiquen las condiciones (5.14) y (5.37)-(5.40).

La solución del problema  $(P_{3\infty})$  para un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial, viene dada por:

$$T_{3\infty}(x, t) = A_{3\infty}T_0 \left(1 - \frac{x}{s_{3\infty}(t)}\right) + B_{3\infty}T_0 \left(1 - \frac{x}{s_{3\infty}(t)}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq s_{3\infty}(t), \quad t > 0, \quad (5.58)$$

$$s_{3\infty}(t) = 2\xi_{3\infty}\sqrt{\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad (5.59)$$

donde las constantes  $A_{3\infty}$  y  $B_{3\infty}$  son:

$$A_{3\infty} = 1 - \frac{\xi_{3\infty}^2}{3}, \quad B_{3\infty} = \frac{1}{3}\xi_{3\infty}^2. \quad (5.60)$$

Como se impone que  $A_{3\infty}$  y  $B_{3\infty}$  deben ser positivos, se obtiene fácilmente que  $\xi_{3\infty}$  debe pertenecer al intervalo  $(0, \sqrt{3})$ . Por lo tanto  $\xi_{3\infty}$  es una solución positiva de la ecuación polinómica de segundo grado:

$$(6 + \text{Ste})z^2 - 3\text{Ste} = 0, \quad 0 < z < \sqrt{3}. \quad (5.61)$$

Es claro que la función polinómica  $p_{3\infty} = p_{3\infty}(z)$  definida por el lado izquierdo de (5.61) tiene una única raíz en  $\mathbb{R}^+$ . Además:

$$p_{3\infty}(0) = -3\text{Ste} < 0, \quad p_{3\infty}(\sqrt{3}) = 18 > 0, \quad (5.62)$$

y así es posible asegurar que la única raíz positiva de  $p_{3\infty}$  pertenece al intervalo  $(0, \sqrt{3})$  y viene dada por:

$$\xi_{3\infty} = \sqrt{\frac{3\text{Ste}}{6 + \text{Ste}}}. \quad (5.63)$$

Por lo tanto,  $A_{3\infty}$  y  $B_{3\infty}$  se definen explícitamente por:

$$A_{3\infty} = \frac{6}{6 + \text{Ste}}, \quad B_{3\infty} = \frac{\text{Ste}}{6 + \text{Ste}}. \quad (5.64)$$

Se tiene entonces el siguiente resultado sobre convergencia:

**Teorema 5.6.** *La solución al problema  $(P_3)$  converge a la solución del problema  $(P_{3\infty})$  cuando  $\text{Bi} \rightarrow +\infty$ .*

*Demostración.* Es análoga a la prueba del teorema 5.4. ■

### 5.1.5. Comparaciones entre soluciones

En esta subsección se realizan comparaciones entre la solución exacta conocida del problema de Stefan (P) y las soluciones aproximadas asociadas a cada problema  $(P_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  obtenidas en las Sección 5.1. Además, en vista de los resultados de convergencia presentados en la subsección anterior, se comparan la solución exacta del problema (P) donde se impone una condición de contorno convectivo en el borde fijo  $x = 0$  con la solución exacta del problema  $(P_\infty)$  en el que se impone una condición de tipo de Dirichlet en  $x = 0$ . Lo mismo se hace con cada solución aproximada obtenida del problema  $(P_i)$  y  $(P_{i\infty})$ ,  $i = 1, 2, 3$ .



## Comparaciones entre las fronteras libres

Para comparar las fronteras libres obtenidas en cada problema, se calcula el coeficiente que caracteriza la frontera libre en el problema exacto (P) y en los problemas aproximados ( $P_i$ )  $i = 1, 2, 3$ . El valor exacto de  $\xi$  y las diferentes aproximaciones  $\xi_i$  con  $i = 1, 2, 3$  se obtienen resolviendo las ecuaciones (5.10), (5.25), (5.30) y (5.35), respectivamente.

En los casos de los problemas ( $P_\infty$ ) y ( $P_{i\infty}$ ) se calcula: el valor exacto  $\xi_\infty$ , resolviendo la ecuación (5.43), y los diferentes  $\xi_{i\infty}$ ,  $i = 1, 2, 3$  dados por las expresiones (5.49), (5.55) y (5.63), respectivamente.

Para hacer visible la precisión de cada método aproximado; fijando algunos números de Stefan y Biot se calculan para  $i = 1, 2, 3$ : el error relativo del coeficiente que caracteriza a la frontera libre asociado al problema ( $P_i$ ) dado por  $E_{\text{rel}}(s_i) = \left| \frac{\xi_i - \xi}{\xi} \right|$  y el error relativo asociado al problema ( $P_{i\infty}$ ) definido por  $E_{\text{rel}}(s_{i\infty}) = \left| \frac{\xi_{i\infty} - \xi_\infty}{\xi_\infty} \right|$ .

Variando los números de Ste y Bi, se obtiene diferentes visualizaciones para el comportamiento del error relativo cometido en cada método. Dado que se obtuvieron gráficos similares para un gran número de casos, se presentan aquí los más significativos. Para  $\text{Ste} = 10^{-3}$  y  $\text{Ste} = 1$  se calcula  $E_{\text{rel}}(s_{i\infty})$  para  $i = 1, 2, 3$ . Además, para esos números de Ste y haciendo que Bi varíe entre 0 y un valor adecuado en el que se pueda apreciar la convergencia, se calcula  $E_{\text{rel}}(s_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Las Figuras 5.1a y 5.1b muestran el comportamiento de los errores relativos que corresponden a los problemas ( $P_i$ ) y ( $P_{i\infty}$ ).

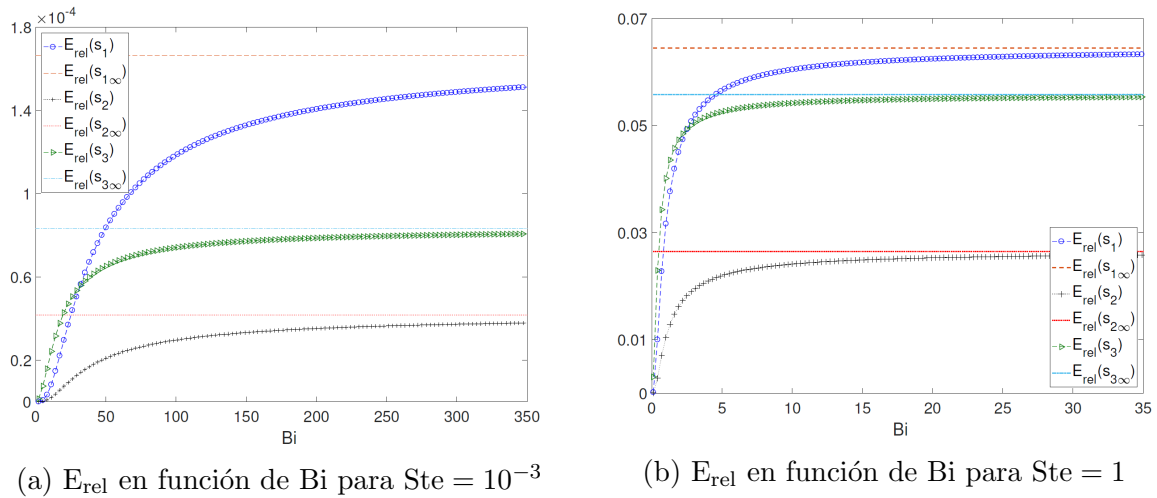


Figura 5.1: Errores relativos de  $s_1$ ,  $s_2$  y  $s_3$  en función de Bi para  $\text{Ste} = 10^{-3}$  y  $\text{Ste} = 1$ .

Del análisis numérico se puede observar que para los parámetros elegidos, los problemas ( $P_2$ ) y ( $P_3$ ) dan la mejor aproximación de la frontera libre.

## Comparaciones entre los perfiles de temperatura

Considerando el proceso de fusión unidimensional en la región  $x > 0$ , se fijan los parámetros físicos para el hielo dados por: la conductividad térmica  $k = 2.219 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ , el calor específico  $c = 2097.6 \text{ J}/(\text{kg K})$ , la difusividad térmica  $\alpha = 1.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  y el calor latente de fusión  $\ell = 3.33 \times 10^5 \text{ J}/\text{kg}$ .

Para mostrar el comportamiento de la temperatura de los problemas (P) y  $(P_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  con respecto a la variable espacial  $x$ , en la Tabla 5.1 se presentan los errores absolutos definidos por  $E_{\text{abs}}(T_i) = |T(x, 10) - T_i(x, 10)|$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Se fija el tiempo en  $t = 10$  s, la temperatura en el borde fijo  $T_0 = 5^\circ\text{C}$  y el coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo  $h = 1.65 \times 10^5 \text{ W}\sqrt{\text{s}}/(\text{m}^\circ\text{C})$ . Puede observarse que estas elecciones permiten definir el número de Stefan y el número de Biot como:  $\text{Ste} = 0.0314$  y  $\text{Bi} = 80$ .

En la Tabla 5.1 se puede ver que la precisión de las temperaturas correspondientes a los problemas  $(P_1)$ ,  $(P_2)$  y  $(P_3)$  es inferior a 0,025. Si se analiza el error absoluto entre  $x = 0.00082$  y  $x = 0.00083$  se obtiene que el problema  $(P_2)$  da la aproximación más adecuada.

Tabla 5.1: Errores absolutos de aproximaciones de temperatura en  $t = 10$  s.

Posición $x$	$E_{\text{abs}}(T_1)$	$E_{\text{abs}}(T_2)$	$E_{\text{abs}}(T_3)$
0	0.023661	0.024332	0.000581
0.0001	0.018960	0.021135	0.002256
0.0002	0.016015	0.018719	0.004368
0.0003	0.014576	0.016830	0.006667
0.0004	0.014391	0.015219	0.008902
0.0005	0.015212	0.013637	0.010823
0.0006	0.016789	0.011835	0.012183
0.0007	0.018877	0.009567	0.012735
0.0008	0.021231	0.006587	0.012234
0.000820	0.021712	0.0058853	0.011986
0.000821	0.021736	0.0058492	0.011972
0.000822	0.021760	0.0058129	0.011958
0.000823	0.021784	0.0057766	0.011944
0.000824	0.021809	0.0057401	0.011930
0.000825	0.021833	0.0057035	0.011916
0.000826	0.021187	0.0049971	0.011231
0.000827	0.015511	0	0.005516
0.000828	0.009834	0	0
0.000829	0.004158	0	0
0.000830	0	0	0
0.0009	0	0	0

## 5.2. Soluciones aproximadas de un problema de Stefan a una fase para una ecuación no clásica del calor con fuente y una condición de temperatura en el borde fijo

Se considera un problema de Stefan unidimensional a una fase para la fusión de un material semi-infinito  $x > 0$  para una ecuación no clásica del calor con una fuente de calor externa  $F$  que depende de la evolución del flujo de calor en la frontera  $x = 0$  de la siguiente

manera:

$$F\left(\frac{\partial T}{\partial x}(0,t),t\right) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{t}} \frac{\partial T}{\partial x}(0,t), \quad t > 0, \quad (5.65)$$

con  $\lambda_0 > 0$  una constante dada. Además, se impone una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo  $x = 0$  el cual puede formularse matemáticamente de la siguiente manera:

**Problema (P<sub>F</sub>):** Hallar la temperatura  $T_F = T_F(x,t)$  en la región líquida  $0 < x < s_F(t)$ ,  $t > 0$  y la ubicación de la frontera libre  $x = s_F(t)$  con  $t \geq 0$  tal que:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\gamma F\left(\frac{\partial T}{\partial x}(0,t),t\right), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (5.66)$$

$$T(0,t) = T_0 > 0, \quad t > 0, \quad (5.67)$$

$$T(s(t),t) = 0, \quad t > 0, \quad (5.68)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(s(t),t) = -\rho \ell \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (5.69)$$

$$s(0) = 0, \quad (5.70)$$

donde los coeficientes térmicos  $k$ ,  $\rho$ ,  $c$ ,  $\ell$  y  $\gamma$  son constantes positivas y  $T_0 > 0$  es la temperatura impuesta en el borde fijo  $x = 0$ .

Este problema fue estudiado en [56] y es un caso particular del desarrollado en el Capítulo 3 de esta Tesis.

En [56] se demostró que para cada parámetro adimensional:

$$\lambda = \frac{\gamma \lambda_0}{(k \rho c)^{1/2}} > 0, \quad (5.71)$$

el problema de frontera libre (P<sub>F</sub>) tiene una única solución de tipo similaridad dada por:

$$T_F(x,t) = T_0 \left(1 - \frac{E(\eta,\lambda)}{E(\xi_F,\lambda)}\right), \quad 0 \leq x \leq s_F(t), \quad t > 0, \quad (5.72)$$

$$s_F(t) = 2a\xi_F\sqrt{t}, \quad t \geq 0, \quad (5.73)$$

donde  $\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$  es la variable de similaridad y  $a^2 = \frac{k}{\rho c}$  es el coeficiente de difusión con

$$E(z,\lambda) = \operatorname{erf}(z) + \frac{4\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^z f(r)dr \quad , \quad f(z) = \exp(-z^2) \int_0^z \exp(r^2)dr, \quad (5.74)$$

siendo la función  $f$  la integral de Dawson y  $\xi_F > 0$  la única solución de la ecuación trascendental

$$\operatorname{Ste} \exp(-z^2) - \sqrt{\pi} z \operatorname{erf}(z) = 2\lambda \left(2z \int_0^z f(r)dr - \operatorname{Ste} f(z)\right), \quad z > 0, \quad (5.75)$$

donde el parámetro adimensional definido por  $\operatorname{Ste} = \frac{cT_0}{\ell} > 0$  representa el número de Stefan.

En las siguientes subsecciones se obtienen soluciones aproximadas del problema (P<sub>F</sub>) que surgen de aplicar el método de balance integral y dos variantes del mismo.

Si se deriva con respecto de  $t$  la condición (5.68) y teniendo en cuenta (5.69), se obtiene:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(s(t),t) \left(-\frac{k}{\rho \ell} \frac{\partial T}{\partial x}(s(t),t)\right) = -\frac{\partial T}{\partial t}(s(t),t), \quad t > 0,$$

y de (5.66), se obtiene la nueva condición:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2(s(t), t) = \frac{\ell}{kc} \left( k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(s(t), t) - \gamma \frac{\lambda_0}{\sqrt{t}} \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \right), \quad t > 0. \quad (5.76)$$

Si se integra la ecuación (5.66) entre  $x = 0$  y  $x = s(t)$ , de las condiciones (5.68) y (5.69), se obtiene la condición integral:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} T(x, t) dx &= \int_0^{s(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) dx + T(s(t), t) \dot{s}(t) \\ &= \frac{1}{\rho c} \int_0^{s(t)} \left( -\frac{\gamma \lambda_0}{\sqrt{t}} \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) + k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) \right) dx \\ &= -\frac{\gamma \lambda_0}{\rho c \sqrt{t}} s(t) \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) + \frac{k}{\rho c} \left( \frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) - \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \right) \\ &= -\frac{\frac{\partial T}{\partial x}(0, t)}{\rho c} \left[ \gamma \lambda_0 \frac{s(t)}{\sqrt{t}} + k \right] - \frac{\ell}{c} \dot{s}(t), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Además, si a la ecuación (5.66) se la integra respecto de  $\xi$  entre 0 y  $x$ , y luego se la integra respecto de  $x$  entre 0 y  $s(t)$ , usando la condición (5.68), se tiene la condición integral:

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t)} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t}(\xi, t) d\xi dx &= \frac{1}{\rho c} \int_0^{s(t)} \int_0^x \left( -\frac{\gamma \lambda_0}{\sqrt{t}} \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) + k \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}(\xi, t) \right) d\xi dx \\ &= \frac{1}{\rho c} \int_0^{s(t)} \left( -\frac{\gamma \lambda_0}{\sqrt{t}} \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) x + k \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) - k \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \right) dx \\ &= \frac{-1}{\rho c} \left[ \left( \gamma \lambda_0 \frac{s(t)}{2\sqrt{t}} + k \right) s(t) \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) + k T(0, t) \right], \\ &\quad 0 < x < s(t), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Se demuestra la existencia y la unicidad de soluciones exactas de los siguientes problemas aproximados que surgen de aplicar el método de balance integral clásico, el método de balance integral modificado y el método de balance integral refinado para el problema de Stefan a una fase ( $P_F$ ):

† Problema ( $P_{F_1}$ ): aplicando el método de balance integral clásico queda definido por (5.67), (5.68), (5.70), (5.76) y (5.77).

† Problema ( $P_{F_2}$ ): aplicando el método de balance integral modificado queda definido por (5.67)-(5.70) y (5.77).

† Problema ( $P_{F_3}$ ): aplicando el método de balance integral refinado queda definido por (5.67)-(5.70) y (5.78).

Para la resolución de los problemas ( $P_{F_i}$ ) con  $i = 1, 2, 3$ , se propone un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial dado por:

$$\tilde{T}_F(x, t) = \tilde{A}_F T_0 \left( 1 - \frac{x}{\tilde{s}_F(t)} \right) + \tilde{B}_F T_0 \left( 1 - \frac{x}{\tilde{s}_F(t)} \right)^2, \quad 0 < x < \tilde{s}_F(t), \quad t > 0. \quad (5.79)$$

Como se vió en el Capítulo 1 de esta Tesis, del hecho de conocer la solución exacta de la temperatura del problema de Stefan ( $P_F$ ), es físicamente razonable asumir que la temperatura aproximada  $\tilde{T}_F$  dada por (5.79) se comporte de manera similar a la exacta  $T_F$  dada por (5.72). Asumiendo las constantes  $\tilde{A}_F$  y  $\tilde{B}_F$  positivas, resulta

$$\begin{aligned} 0 < \tilde{T}_F(x, t) < T_0, & \quad 0 < x < \tilde{s}_F(t), \quad t > 0, \\ \frac{\partial \tilde{T}_F}{\partial x}(x, t) = \frac{-T_0}{\tilde{s}_F(t)} \left( \tilde{A}_F + 2\tilde{B}_F \left( 1 - \frac{x}{\tilde{s}_F(t)} \right) \right) < 0, & \quad 0 < x < \tilde{s}_F(t), \quad t > 0, \end{aligned}$$

de igual forma que lo cumple la temperatura exacta  $T_F$  dada por (5.72):

$$0 < T_F(x, t) < T_0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial T_F}{\partial x}(x, t) < 0, \quad 0 < x < s_F(t), \quad t > 0.$$

De acuerdo al perfil adoptado (5.79), en virtud de (5.77), se obtiene:

$$\tilde{s}_F(t) \dot{\tilde{s}}_F(t) \left( T_0 \left( \frac{\tilde{A}_F}{2} + \frac{\tilde{B}_F}{3} \right) + \frac{\ell}{c} \right) = \frac{T_0(\tilde{A}_F + 2\tilde{B}_F)}{\rho c} \left( \frac{\gamma \lambda_0 \tilde{s}_F(t)}{\sqrt{t}} + k \right), \quad (5.80)$$

y si se considera (5.78) se tiene:

$$\tilde{s}_F(t) \dot{\tilde{s}}_F(t) (\tilde{A}_F + \tilde{B}_F) = \frac{6}{\rho c} \left( \frac{\gamma \lambda_0 \tilde{s}_F(t)}{2\sqrt{t}} (\tilde{A}_F + 2\tilde{B}_F) + k\tilde{B}_F \right), \quad (5.81)$$

por lo que la frontera libre para los problemas aproximados ( $P_{F_i}$ ) con  $i = 1, 2, 3$ , dada por

$$\tilde{s}_F(t) = 2a\xi_F\sqrt{t}, \quad t \geq 0, \quad (5.82)$$

es solución de ambas ecuaciones diferenciales ordinarias (5.80) y (5.81) y satisface (5.70), donde  $\xi_F > 0$  es un parámetro a determinar. Así, puede observarse, que la frontera libre aproximada dada por (5.82) tiene la misma forma de la frontera libre del problema exacto ( $P_F$ ) dada por (5.73).

### 5.2.1. Solución del problema aproximado aplicando el método de balance integral clásico

El método del balance integral clásico para resolver el problema ( $P_F$ ) propone la resolución de un problema aproximado definido de la siguiente manera:

**Problema ( $P_{F_1}$ ):** Hallar la temperatura  $T_{F_1} = T_{F_1}(x, t)$ ,  $0 < x < s_{F_1}(t)$ ,  $t > 0$  en la región líquida y la ubicación de la frontera libre  $x = s_{F_1}(t)$ ,  $t \geq 0$  tal que se verifiquen las condiciones (5.67), (5.68), (5.70), (5.76) y (5.77).

Proponiendo el siguiente perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial:

$$T_{F_1}(x, t) = A_{F_1}T_0 \left( 1 - \frac{x}{s_{F_1}(t)} \right) + B_{F_1}T_0 \left( 1 - \frac{x}{s_{F_1}(t)} \right)^2, \quad 0 \leq x \leq s_{F_1}(t), \quad t > 0, \quad (5.83)$$

la frontera libre toma la forma

$$s_{F_1}(t) = 2a\xi_{F_1}\sqrt{t}, \quad t \geq 0, \quad (5.84)$$

donde las constantes  $A_{F_1}$ ,  $B_{F_1}$  y  $\xi_{F_1}$  se determinan de las condiciones (5.67), (5.76) y (5.77).

Las condiciones (5.68) y (5.70) se cumplen inmediatamente. De la condición (5.67), se tiene:

$$A_{F_1} + B_{F_1} = 1. \quad (5.85)$$

Como

$$\frac{\partial T_{F_1}}{\partial x}(0, t) = -\frac{T_0}{2\xi_{F_1} a \sqrt{t}} (A_{F_1} + 2B_{F_1}), \quad \frac{d}{dt} \int_0^{s_{F_1}(t)} T_{F_1}(x, t) dx = \frac{aT_0 \xi_{F_1}}{\sqrt{t}} \left( \frac{A_{F_1}}{2} + \frac{B_{F_1}}{3} \right),$$

de la condición (5.77), se tiene

$$\xi_{F_1} \left( \frac{A_{F_1}}{2} + \frac{B_{F_1}}{3} \right) = \left( \lambda + \frac{1}{2} \xi_{F_1} \right) (A_{F_1} + 2B_{F_1}) - \frac{1}{\text{Ste}} \xi_{F_1},$$

o equivalentemente

$$(3\xi_{F_1}^2 - 6\lambda\xi_{F_1} - 3) A_{F_1} + (2\xi_{F_1}^2 - 12\lambda\xi_{F_1} - 6) B_{F_1} = -\frac{6}{\text{Ste}} \xi_{F_1}^2. \quad (5.86)$$

Luego, de (5.85) y (5.86), se obtiene:

$$A_{F_1} = \frac{-2(3+\text{Ste})\xi_{F_1}^2 + 12\lambda\text{Ste} \xi_{F_1} + 6\text{Ste}}{\text{Ste}(\xi_{F_1}^2 + 6\lambda\xi_{F_1} + 3)}, \quad B_{F_1} = \frac{3(2+\text{Ste})\xi_{F_1}^2 - 6\lambda\text{Ste} \xi_{F_1} - 3\text{Ste}}{\text{Ste}(\xi_{F_1}^2 + 6\lambda\xi_{F_1} + 3)}. \quad (5.87)$$

Del hecho que

$$\frac{\partial T_{F_1}}{\partial x}(s_{F_1}(t), t) = -\frac{A_{F_1} T_0}{2a\xi_{F_1} \sqrt{t}}, \quad \frac{\partial^2 T_{F_1}}{\partial x^2}(s_{F_1}(t), t) = \frac{B_{F_1} T_0}{2a^2 \xi_{F_1}^2 t},$$

y de la condición (5.76) resulta

$$A_{F_1}^2 \text{Ste} = 2B_{F_1} + 2\lambda(A_{F_1} + 2B_{F_1})\xi_{F_1}.$$

Al sustituir los valores de  $A_{F_1}$  y  $B_{F_1}$  dados por (5.87) en la expresión anterior, se obtiene que  $\xi_{F_1}$  debe ser una solución positiva de la ecuación polinómica:

$$\begin{aligned} & -4\lambda(3 + 2\text{Ste})z^5 + 2(12 + 9\text{Ste} + 2\text{Ste}^2 - 12\lambda^2(3 + 2\text{Ste}))z^4 + \\ & -12\lambda(-9 + 16\text{Ste} + 4\text{Ste}^4)z^3 + 12(1 + 2\text{Ste})(-3 + (6\lambda^2 - 1)\text{Ste})z^2 + \\ & + 72\lambda\text{Ste}(1 + 2\text{Ste})z + 18\text{Ste} + 3\text{Ste}^2 = 0, \quad z > 0, \end{aligned} \quad (5.88)$$

donde el parámetro  $\lambda > 0$  está dado por (5.71).

Es claro que la función polinómica  $p_{F_1} = p_{F_1}(z)$  definida por el lado izquierdo de (5.88) tiene al menos una raíz en  $\mathbb{R}^+$  pues

$$p_{F_1}(0) = 18\text{Ste} + 3\text{Ste}^2 > 0, \quad p_{F_1}(+\infty) = -\infty.$$

Por la regla de los signos de Descartes, para tener una solución única de (5.88) basta con tomar  $\lambda$  tal que  $12 + 9\text{Ste} + 2\text{Ste}^2 - 12\lambda^2(3 + 2\text{Ste}) < 0$ , es decir

$$\lambda > g(\text{Ste}), \quad (5.89)$$

donde

$$g(\text{Ste}) = \left( \frac{2\text{Ste}^2 + 9\text{Ste} + 12}{36 + 24\text{Ste}} \right)^{1/2}, \quad (5.90)$$

y como  $g$  es una función creciente entonces para  $0 < \text{Ste} < 1$  es suficiente tomar

$$\lambda > g(1) \cong 0,619139187.$$

Cabe aclarar que se considera  $\text{Ste} \in (0, 1)$  debido a que para la mayoría de los materiales con cambio de fase, el número de Stefan no excede el valor uno [174].

Así, se ha demostrado el siguiente resultado:

**Teorema 5.7.** *Si  $\lambda > g(1)$  con  $g$  definida por (5.90) y  $\text{Ste} \in (0, 1)$ , entonces la única solución del problema  $(P_{F_1})$ , para un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial, está dada por (5.83)-(5.84), donde las constantes positivas  $A_{F_1}$  y  $B_{F_1}$  están definidas por (5.87) y  $\xi_{F_1} > 0$  es la única solución de la ecuación polinómica (5.88).*

### 5.2.2. Solución del problema aproximado aplicando el método de balance integral modificado

Ahora, se resolverá el problema  $(P_F)$  con el método de balance integral modificado, es decir, se propone la resolución del problema aproximado definido por:

**Problema  $(P_{F_2})$ :** Hallar la temperatura  $T_{F_2} = T_{F_2}(x, t)$ ,  $0 < x < s_{F_2}(t)$ ,  $t > 0$  en la región líquida y la ubicación de la frontera libre  $x = s_{F_2}(t)$ ,  $t \geq 0$  tal que se verifiquen las condiciones (5.67)-(5.70) y (5.77).

Proponiendo el siguiente perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial:

$$T_{F_2}(x, t) = A_{F_2}T_0 \left( 1 - \frac{x}{s_{F_2}(t)} \right) + B_{F_2}T_0 \left( 1 - \frac{x}{s_{F_2}(t)} \right)^2, \quad 0 \leq x \leq s_{F_2}(t), \quad t > 0, \quad (5.91)$$

la frontera libre toma la forma

$$s_{F_2}(t) = 2a\xi_{F_2}\sqrt{t}, \quad t \geq 0. \quad (5.92)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial T_{F_2}}{\partial x}(s_{F_2}(t), t) = -\frac{A_{F_2}T_0}{2a\xi_{F_2}\sqrt{t}}, \quad \frac{d}{dt} \int_0^{s_{F_2}(t)} T_{F_2}(x, t)dx = \frac{aT_0\xi_{F_2}}{\sqrt{t}} \left( \frac{A_{F_2}}{2} + \frac{B_{F_2}}{3} \right),$$

las constantes  $A_{F_2}$ ,  $B_{F_2}$  y  $\xi_{F_2}$  se determinan por las condiciones (5.67), (5.69) y (5.77), obteniéndose:

$$A_{F_2} = \frac{2}{\text{Ste}}\xi_{F_2}^2, \quad B_{F_2} = 1 - \frac{2}{\text{Ste}}\xi_{F_2}^2 \quad (5.93)$$

y  $\xi_{F_2}$  como una solución positiva de la ecuación polinómica:

$$z^4 + 6\lambda z^3 + (6 + \text{Ste})z^2 - 6\lambda\text{Ste}z - 3\text{Ste} = 0, \quad z > 0. \quad (5.94)$$

Es fácil ver, usando la regla de los signos de Descartes, que (5.94) tiene una única solución positiva.

Así, queda demostrado el siguiente resultado:

**Teorema 5.8.** *La única solución del problema  $(P_{F_2})$ , para un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial, está dada por (5.91)-(5.92), donde las constantes positivas  $A_{F_2}$  y  $B_{F_2}$  están definidas por (5.93) y  $\xi_{F_2} > 0$  es la única solución de la ecuación polinómica (5.94).*

### 5.2.3. Solución del problema aproximado aplicando el método de balance integral refinado

El método de balance integral refinado para resolver el problema  $(P_F)$ , propone la resolución del problema aproximado formulado por:

**Problema  $(P_{F_3})$ :** Hallar la temperatura  $T_{F_3} = T_{F_3}(x, t)$ ,  $0 < x < s_{F_3}(t)$ ,  $t > 0$  en la región líquida y la ubicación de la frontera libre  $x = s_{F_3}(t)$ ,  $t \geq 0$  tal que se verifiquen las siguientes condiciones (5.67)-(5.70) y (5.78).

Proponiendo el siguiente perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial:

$$T_{F_3}(x, t) = A_{F_3}T_0 \left(1 - \frac{x}{s_{F_3}(t)}\right) + B_{F_3}T_0 \left(1 - \frac{x}{s_{F_3}(t)}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq s_{F_3}(t), \quad t > 0, \quad (5.95)$$

la frontera libre toma la forma

$$s_{F_3}(t) = 2a\xi_{F_3}\sqrt{t}, \quad t \geq 0, \quad (5.96)$$

donde las constantes  $A_{F_3}$ ,  $B_{F_3}$  y  $\xi_{F_3}$  se determinan a partir de las condiciones (5.67), (5.69) y (5.78). De manera similar a lo realizado en los problemas anteriores, y del hecho que:

$$\int_0^{s_{F_3}(t)} \int_0^x \frac{\partial T_{F_3}}{\partial t}(\xi, t) d\xi dx = \frac{T_0(A_{F_3} + B_{F_3})a^2}{3} \xi_{F_3}^2,$$

se obtiene que:

$$A_{F_3} = \frac{2}{\text{Ste}} \xi_{F_3}^2, \quad B_{F_3} = 1 - \frac{2}{\text{Ste}} \xi_{F_3}^2, \quad (5.97)$$

donde  $\xi_{F_3}$  es una solución positiva de la ecuación polinómica:

$$-6\lambda z^3 - (6 + \text{Ste}) z^2 + 6\lambda \text{Ste} z + 3\text{Ste} = 0, \quad z > 0, \quad (5.98)$$

la cual tiene una única solución usando la regla de los signos de Descartes.

Se ha probado entonces que:

**Teorema 5.9.** *La única solución del problema  $(P_{F_3})$ , para un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial, está dada por (5.95)-(5.96), donde las constantes positivas  $A_{F_3}$  y  $B_{F_3}$  están definidas por (5.97) y  $\xi_{F_3} > 0$  es la única solución de la ecuación polinómica (5.98).*

### 5.2.4. Comparaciones entre soluciones

Dado que estos métodos aproximados están diseñados como una técnica para rastrear la ubicación de la frontera libre, las comparaciones entre las soluciones aproximadas y la exacta se harán sobre el coeficiente que caracteriza a la frontera libre. Es decir, se



compara la solución exacta conocida del problema de Stefan ( $P_F$ ) y la solución aproximada del problema ( $P_{F_i}$ )  $i = 1, 2, 3$  calculando los coeficientes  $\xi_F$  y  $\xi_{F_i}$  con  $i = 1, 2, 3$  que caracterizan a las fronteras libres, los cuales se obtienen resolviendo (5.75), (5.88), (5.94) y (5.98), respectivamente.

Para valores de  $0 < Ste < 1$  cuando el parámetro adimensional es  $\lambda = 0.7$ , se muestra en cada gráfico de la Figura 5.2, cómo el coeficiente adimensional  $\xi_{F_i}$ , que caracteriza la ubicación de la frontera libre  $s_{F_i}$  con  $i = 1, 2, 3$  se aproxima al coeficiente  $\xi_F$ , correspondiente a la frontera libre  $s_F$  del problema exacto.

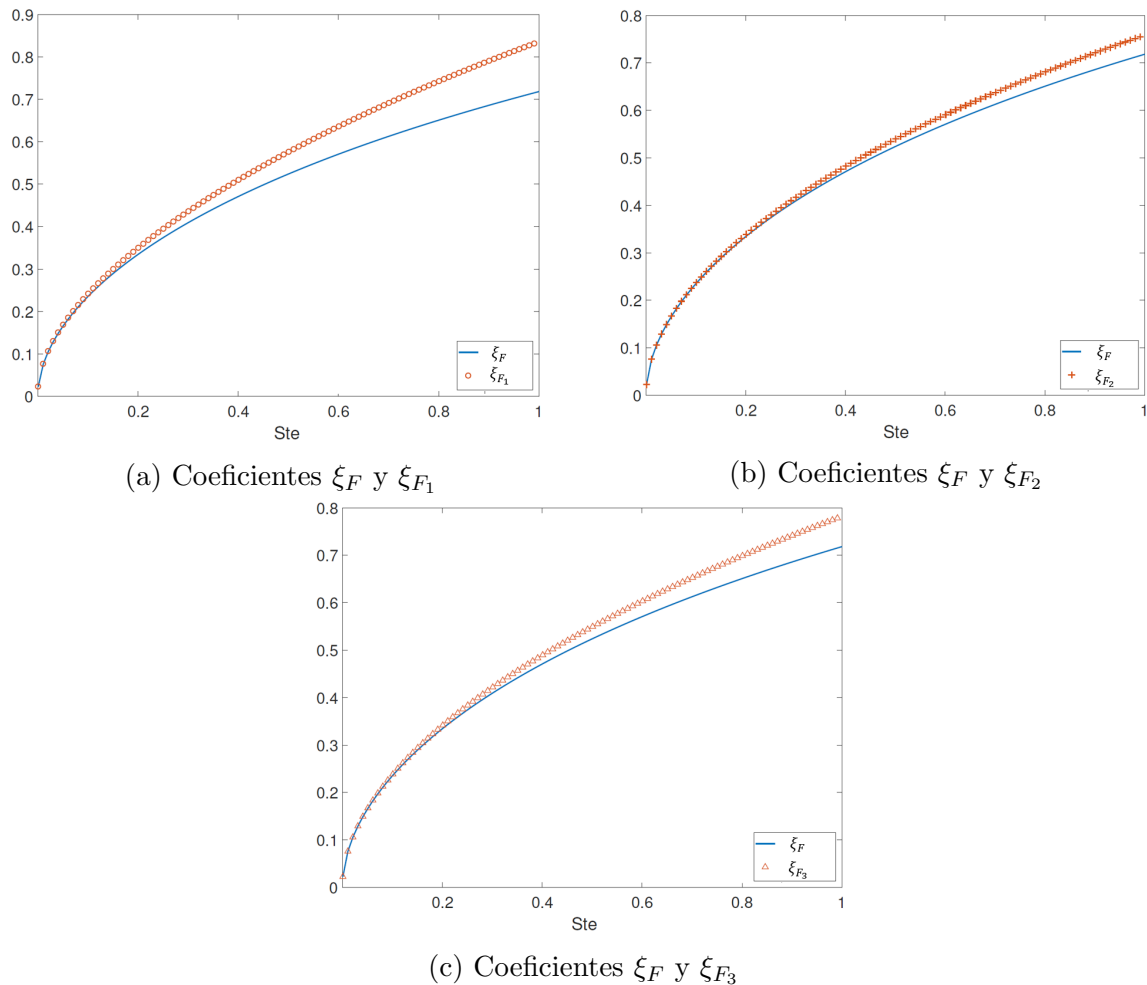


Figura 5.2: Coeficientes  $\xi_F$ ,  $\xi_{F_i}$  con  $i = 1, 2, 3$  en función de Ste para  $\lambda = 0.7$ .

### 5.3. Soluciones aproximadas de un problema de Stefan a una fase para una ecuación no clásica del calor con fuente y una condición convectiva en el borde fijo

Se considera un problema de Stefan unidimensional de una fase para la fusión de un material semi-infinito  $x > 0$  para una ecuación no clásica del calor con una fuente de

calor externa  $F$  dada por (5.65), donde se impone una condición de tipo Robin en el borde fijo  $x = 0$  el cual puede formularse matemáticamente de la siguiente manera:

**Problema ( $P_{Fh}$ ):** Hallar la temperatura  $T_{Fh} = T_{Fh}(x, t)$ ,  $0 < x < s_{Fh}(t)$ ,  $t > 0$  en la región líquida y la ubicación de la frontera libre  $x = s_{Fh}(t)$ ,  $t \geq 0$  tal que:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\gamma F \left( \frac{\partial T}{\partial x}(0, t), t \right), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (5.99)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{h}{\sqrt{t}} (T(0, t) - T_0), \quad t > 0, \quad (5.100)$$

$$T(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (5.101)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) = -\rho \ell \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (5.102)$$

$$s(0) = 0, \quad (5.103)$$

donde los coeficientes térmicos  $k$ ,  $\rho$ ,  $c$ ,  $\ell$  y  $\gamma$  son constantes positivas,  $T_0 > 0$  es la temperatura ambiente y  $h > 0$  es el coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo  $x = 0$ .

De manera similar a [56], se probará la existencia y unicidad de solución de tipo similaridad del problema de Stefan ( $P_{Fh}$ ) mediante el cambio de variable:

$$\Phi(\eta) = T(x, t),$$

donde  $\eta = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$ , es la variable de similaridad y  $a^2 = \frac{k}{\rho c}$  es la difusividad térmica. Siguiendo el método clásico de Neumann, se propone una solución de tipo similaridad dada por:

$$T_{Fh}(x, t) = \Phi \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right), \quad 0 \leq x \leq s_{Fh}(t), \quad t > 0, \quad (5.104)$$

$$s_{Fh}(t) = 2a\xi_{Fh}\sqrt{t}, \quad t \geq 0, \quad (5.105)$$

donde  $\xi_{Fh} > 0$  es un parámetro adimensional a determinar que caracteriza a la frontera libre  $x = s_{Fh}(t)$ .

Entonces, teniendo en cuenta la variable de similaridad  $\eta$ , se tiene que:

$$\frac{\partial T_{Fh}}{\partial t}(x, t) = -\frac{1}{2t}\eta\Phi'(\eta), \quad \frac{\partial T_{Fh}}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{t}}\Phi'(\eta), \quad \frac{\partial^2 T_{Fh}}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{4a^2t}\Phi''(\eta),$$

y reemplazando estas expresiones en la ecuación (5.99), se obtiene que la función  $\Phi = \Phi(\eta)$  debe satisfacer la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$\Phi''(\eta) + 2\eta\Phi'(\eta) = 2\lambda\Phi'(0), \quad 0 < \eta < \xi_{Fh}, \quad (5.106)$$

donde  $\lambda > 0$  está definido por (5.71). Además, de las condiciones (5.100)-(5.102) resultan las siguientes condiciones para la función  $\Phi = \Phi(\eta)$ :

$$\Phi'(0) = 2\text{Bi}(\Phi(0) - T_0), \quad (5.107)$$

$$\Phi(\xi_{Fh}) = 0, \quad (5.108)$$

$$\Phi'(\xi_{Fh}) = -2\frac{T_0}{\text{Ste}}\xi_{Fh}, \quad (5.109)$$

donde el parámetro adimensional definido por  $\text{Bi} = \frac{ha}{k} > 0$  representa el número de Biot generalizado y el parámetro  $\text{Ste} = \frac{cT_0}{\ell} > 0$  es el número de Stefan.

Integrando la ecuación (5.106) y teniendo en cuenta las condiciones (5.107) y (5.108), se tiene que

$$\Phi(\eta) = \frac{\text{Bi} T_0 \sqrt{\pi}}{1 + \text{Bi} \sqrt{\pi} E(\xi_{Fh}, \lambda)} [E(\xi_{Fh}, \lambda) - E(\eta, \lambda)], \quad 0 \leq \eta \leq \xi_{Fh}, \quad (5.110)$$

donde  $E = E(z, \lambda)$  viene dada por (5.74) y teniendo en cuenta la condición (5.109) se tiene que  $\xi_{Fh} > 0$  debe ser una solución de

$$\text{Ste} \exp(-z^2) - \sqrt{\pi} z \operatorname{erf}(z) - \frac{z}{\text{Bi}} = 2\lambda \left( 2z \int_0^z f(r) dr - \text{Ste} f(z) \right), \quad z > 0. \quad (5.111)$$

Si se llama  $W_1^*(z) = W_1(z) - \frac{z}{\text{Bi}}$  al lado izquierdo de la ecuación (5.111), donde

$$W_1(z) = \text{Ste} \exp(-z^2) - \sqrt{\pi} z \operatorname{erf}(z), \quad z > 0,$$

se define,

$$W_2(z) = 2z \int_0^z f(r) dr - \text{Ste} f(z), \quad z > 0,$$

y teniendo en cuenta las propiedades de las funciones  $W_1$  y  $W_2$  obtenidas en [56], entonces existe un único  $\xi_{Fh} > 0$  tal que

$$W_1^*(z) = 2\lambda W_2(z), \quad z > 0. \quad (5.112)$$

De esta forma, queda probado el siguiente resultado:

**Teorema 5.10.** *El problema de Stefan ( $P_{Fh}$ ) tiene una única solución de tipo similaridad dada por*

$$T_{Fh}(x, t) = \frac{\text{Bi} T_0 \sqrt{\pi}}{1 + \text{Bi} \sqrt{\pi} E(\xi_{Fh}, \lambda)} \left[ E(\xi_{Fh}, \lambda) - E\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}, \lambda\right) \right], \quad 0 \leq x \leq s_{Fh}(t), \quad t > 0,$$

$$s_{Fh}(t) = 2a\xi_{Fh}\sqrt{t}, \quad t \geq 0,$$

donde la función  $E = E(z, \lambda)$  viene dada por (5.74), el parámetro  $\lambda > 0$  está definido por (5.71) y  $\xi_{Fh} > 0$  es la única solución de la ecuación (5.111).

En la sección anterior, se estudió el problema ( $P_F$ ) en el que se asumió una condición de temperatura en el borde fijo  $x = 0$ . En el problema ( $P_{Fh}$ ) que se estudia en esta sección, se impone una condición de frontera convectiva (5.100) caracterizada por el coeficiente  $h$  en el borde fijo  $x = 0$ . Esta condición constituye una generalización de la condición de tipo Dirichlet en el sentido de que si se toma el límite cuando  $h \rightarrow +\infty$  se obtiene  $T(0, t) = T_0$ . De la definición de Bi, estudiar el comportamiento límite de la solución del problema ( $P_{Fh}$ ) cuando  $h \rightarrow +\infty$  es equivalente a estudiar el caso cuando  $\text{Bi} \rightarrow +\infty$ .

Si para cada  $h > 0$ , se define  $\xi_{Fh}$  como la única solución de la ecuación (5.111) entonces, si se considera una sucesión  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  creciente tal que  $h_n \rightarrow h$ , la sucesión  $\{\xi_{Fh_n}\}$  resulta creciente y acotada, y por lo tanto es convergente. Además, se puede ver fácilmente

que  $\xi_{Fh} \rightarrow \xi_F$  donde  $\xi_F$  es la solución única de (5.75). Entonces, es posible afirmar que la solución del problema  $(P_{Fh})$  converge a la solución del problema  $(P_F)$  cuando  $Bi \rightarrow +\infty$  ( $h \rightarrow +\infty$ ). Así:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow +\infty} s_{Fh}(t) &= s_F(t), \\ \lim_{h \rightarrow +\infty} T_{Fh}(x, t) &= T_F(x, t).\end{aligned}$$

A continuación, se prueba la existencia y unicidad de soluciones exactas de los siguientes problemas aproximados que surgen de aplicar el método de balance integral clásico, el método de balance integral modificado y el método de balance integral refinado al problema de Stefan a una fase  $(P_{Fh})$ :

- † Problema  $(P_{F_1h})$ : aplicando el método de balance integral clásico queda definido por (5.76), (5.77), (5.100), (5.101) y (5.103).
- † Problema  $(P_{F_2h})$ : aplicando el el método de balance integral modificado queda definido por (5.77), (5.100)-(5.103).
- † Problema  $(P_{F_3h})$ : aplicando el método de balance integral refinado queda definido por (5.78), (5.100)-(5.103).

Para la resolución de estos problemas, se propone un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial dado por:

$$\tilde{T}_{Fh}(x, t) = \tilde{A}_{Fh}T_0 \left(1 - \frac{x}{\tilde{s}_{Fh}(t)}\right) + \tilde{B}_{Fh}T_0 \left(1 - \frac{x}{\tilde{s}_{Fh}(t)}\right)^2, \quad 0 < x < \tilde{s}_{Fh}(t), \quad t > 0. \quad (5.113)$$

Como se vió en la sección anterior, de acuerdo al perfil adoptado, la frontera libre para los problemas aproximados  $(P_{F_ih})$  con  $i = 1, 2, 3$ , dada por

$$\tilde{s}_{Fh}(t) = 2a\xi_{Fh}\sqrt{t}, \quad t > 0, \quad (5.114)$$

es solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias (5.80) y (5.81) y satisface (5.103), donde  $\tilde{\xi}_{Fh} > 0$  es un parámetro a determinar. Así, puede observarse, que la frontera libre aproximada dada por (5.114) tiene la misma forma de la frontera libre del problema exacto  $(P_{Fh})$  dada en el Teorema 5.10.

### 5.3.1. Solución del problema aproximado aplicando el método de balance integral clásico y análisis de su comportamiento asintótico

El método de balance integral clásico para resolver el problema  $(P_{Fh})$ , propone la resolución del problema aproximado formulado por:

**Problema  $(P_{F_1h})$ :** Hallar la temperatura  $T_{F_1h} = T_{F_1h}(x, t)$ ,  $0 < x < s_{F_1h}(t)$ ,  $t > 0$  en la región líquida y la ubicación de la frontera libre  $x = s_{F_1h}(t)$ ,  $t \geq 0$  tal que se verifiquen las siguientes condiciones (5.76), (5.77), (5.100), (5.101) y (5.103).

Para el perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial:

$$T_{F_1h}(x, t) = A_{F_1h}T_0 \left(1 - \frac{x}{s_{F_1h}(t)}\right) + B_{F_1h}T_0 \left(1 - \frac{x}{s_{F_1h}(t)}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq s_{F_1h}(t), \quad t > 0, \quad (5.115)$$

la frontera libre toma la forma

$$s_{F_1h}(t) = 2a\xi_{F_1h}\sqrt{t}, \quad t \geq 0, \quad (5.116)$$

donde las condiciones (5.101) y (5.103) se verifican inmediatamente y, de manera similar a la sección anterior, las constantes  $A_{F_1h}$ ,  $B_{F_1h}$  y  $\xi_{F_1h}$  se determinan de las condiciones (5.76), (5.77) y (5.100), obteniéndose:

$$A_{F_1h} = \frac{-2(3+Ste)\xi_{F_1h}^2 + \left(12\lambda Ste - \frac{6}{Bi}\right)\xi_{F_1h} + 6Ste}{Ste\left(\xi_{F_1h}^2 + \left(6\lambda + \frac{2}{Bi}\right)\xi_{F_1h} + 3\right)}, \quad B_{F_1h} = \frac{3(2+Ste)\xi_{F_1h}^2 + \left(\frac{3}{Bi} - 6\lambda Ste\right)\xi_{F_1h} - 3Ste}{Ste\left(\xi_{F_1h}^2 + \left(6\lambda + \frac{2}{Bi}\right)\xi_{F_1h} + 3\right)}, \quad (5.117)$$

donde  $\xi_{F_1h}$  es una solución positiva de la ecuación polinómica:

$$\begin{aligned} & -4\lambda(3+2Ste)z^5 + 2\left(12+9Ste+2Ste^2-12\lambda^2(3+2Ste)-\frac{4\lambda}{Bi}(3+2Ste)\right)z^4 + \\ & \quad + \left(-12\lambda(-9+16Ste+4Ste^4)+\frac{6}{Bi}(7+2Ste)\right)z^3 + \\ & \quad + 12\left((1+2Ste)(-3+(6\lambda^2-1)Ste)+\frac{2}{Bi^2}-\frac{3\lambda}{Bi}(1+Ste)\right)z^2 + \\ & \quad + (72\lambda Ste(1+2Ste)-\frac{6}{Bi}(3+10Ste))z + 18Ste + 3Ste^2 = 0, \quad z > 0. \end{aligned} \quad (5.118)$$

Es fácil ver que la ecuación (5.118) tiene al menos una solución. De hecho, llamando  $p_{F_1h} = p_{F_1h}(z)$  a la función polinómica definida por el lado izquierdo de la ecuación (5.118), se tiene

$$p_{F_1h}(0) = 18Ste + 3Ste^2 > 0, \quad p_{F_1h}(+\infty) = -\infty.$$

Para demostrar la unicidad de solución se utiliza la regla de los signos de Descartes. Por lo tanto, si se reescribe (5.118) como  $\sum_{i=0}^5 a_i z^i = 0$ , se tiene que analizar el signo de cada coeficiente  $a_i$  con  $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Claramente,  $a_5 < 0$  y  $a_0 > 0$ . Para  $0 < Ste < 1$  y  $\lambda > 0,62$ , como en el problema  $(P_{F_1})$  de la sección anterior,  $a_4 < 0$  para todo  $Bi > 0$ . Bajo estas hipótesis:  $a_3 < 0$  y  $a_1 > 0$  si y solo si  $Bi > \frac{3+10Ste}{12\lambda Ste(1+2Ste)}$ .

Se ha probado entonces el siguiente resultado:

**Teorema 5.11.** *Si  $Bi > \frac{3+10Ste}{12\lambda Ste(1+2Ste)}$  y  $\lambda > g(1)$  con  $g$  definida por (5.90),  $Ste \in (0, 1)$ , entonces la única solución del problema  $(P_{F_1h})$ , para un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial, está dada por (5.115)-(5.116), donde las constantes positivas  $A_{F_1h}$  y  $B_{F_1h}$  están definidas por (5.117) y  $\xi_{F_1h} > 0$  es la única solución de la ecuación polinómica (5.118).*

Como en la Sección 5.1.4, para probar la convergencia de la única solución de  $(P_{F_1h})$  a la única solución de  $(P_{F_1})$  cuando  $Bi \rightarrow +\infty$ , se denotará  $T_{F_1h}(x, t) = T_{F_1h}(x, t, Bi)$ ,  $A_{F_1h} = A_{F_1h}(Bi)$ ,  $B_{F_1h} = B_{F_1h}(Bi)$ ,  $s_{F_1h}(t) = s_{F_1h}(t, Bi)$  y  $\xi_{F_1h} = \xi_{F_1h}(Bi)$ .

A partir de la existencia y unicidad de solución del problema  $(P_{F_1h})$  es posible enunciar el siguiente resultado de convergencia:

**Teorema 5.12.** *Si  $\lambda > g(1)$  con  $g$  definida por (5.90) y  $Ste \in (0, 1)$ , entonces la solución del problema  $(P_{F_1h})$  converge a la solución del problema  $(P_{F_1})$  cuando  $Bi \rightarrow +\infty$ .*

*Demostración.* Del problema  $(P_{F_1h})$ , si se fija  $Ste \in (0, 1)$  y  $\lambda > g(1)$  con  $g$  definida por (5.90), se sabe que  $\xi_{F_1h} = \xi_{F_1h}(Bi)$  es la única solución de la ecuación (5.118).

Al tomar el límite cuando  $\text{Bi} \rightarrow +\infty$  se obtiene que  $\lim_{\text{Bi} \rightarrow +\infty} \xi_{F_1h}(\text{Bi})$  debe ser una solución de la ecuación (5.88). Como esta última ecuación tiene única solución  $\xi_{F_1}$  resulta  $\lim_{\text{Bi} \rightarrow +\infty} \xi_{F_1h}(\text{Bi}) = \xi_{F_1}$ . Sigue inmediatamente que  $\lim_{\text{Bi} \rightarrow +\infty} s_{F_1h}(t, \text{Bi}) = s_{F_1}(t)$ .

Para la convergencia  $T_{F_1h}(x, t, \text{Bi}) \rightarrow T_{F_1}(x, t)$  se prueba mediante simples cálculos que  $A_{F_1h}(\text{Bi}) \rightarrow A_{F_1}$  y  $B_{F_1h}(\text{Bi}) \rightarrow B_{F_1}$ , cuando  $\text{Bi} \rightarrow +\infty$ . ■

### 5.3.2. Solución del problema aproximado aplicando el método de balance integral modificado y análisis de su comportamiento asintótico

El método de balance integral modificado para resolver el problema ( $P_{F_h}$ ), propone la resolución del problema aproximado formulado de la siguiente manera:

**Problema ( $P_{F_2h}$ ):** Hallar la temperatura  $T_{F_2h} = T_{F_2h}(x, t)$ ,  $0 < x < s_{F_2h}(t)$ ,  $t > 0$  en la región líquida y la ubicación de la frontera libre  $x = s_{F_2h}(t)$ ,  $t \geq 0$  tal que se verifiquen las siguientes condiciones (5.77), (5.100)-(5.103).

Para el perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial:

$$T_{F_2h}(x, t) = A_{F_2h}T_0 \left(1 - \frac{x}{s_{F_2h}(t)}\right) + B_{F_2h}T_0 \left(1 - \frac{x}{s_{F_2h}(t)}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq s_{F_2h}(t), \quad t > 0, \quad (5.119)$$

la frontera libre toma la forma

$$s_{F_2h}(t) = 2a\xi_{F_2h}\sqrt{t}, \quad t \geq 0, \quad (5.120)$$

donde las condiciones (5.101) y (5.103) se verifican inmediatamente. Como en la sección anterior, las constantes  $A_{F_2h}$ ,  $B_{F_2h}$  y  $\xi_{F_2h}$  se determinan de las condiciones (5.77), (5.100) y (5.102), obteniéndose:

$$A_{F_2h} = \frac{2}{\text{Ste}} \xi_{F_2h}^2, \quad B_{F_2h} = \frac{-\frac{2}{\text{Ste}} \xi_{F_2h}^3 - \frac{1}{\text{Ste Bi}} \xi_{F_2h}^2 + \xi_{F_2h}}{\xi_{F_2h} + \frac{1}{\text{Bi}}}, \quad (5.121)$$

y  $\xi_{F_2h}$  debe ser una solución positiva de la ecuación polinómica:

$$z^4 + \left(6\lambda + \frac{2}{\text{Bi}}\right) z^3 + (6 + \text{Ste}) z^2 - \left(6\lambda\text{Ste} + \frac{3}{\text{Bi}}\right) z - 3\text{Ste} = 0, \quad z > 0, \quad (5.122)$$

donde la existencia y la unicidad de solución pueden verse fácilmente mediante la regla de los signos de Descartes.

De esta forma queda probado el siguiente resultado:

**Teorema 5.13.** *La única solución del problema ( $P_{F_2h}$ ), para un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial, está dada por (5.119)-(5.120), donde las constantes positivas  $A_{F_2h}$  y  $B_{F_2h}$  están definidas por (5.121) y  $\xi_{F_2h} > 0$  es la única solución de la ecuación polinómica (5.122).*

De la existencia y unicidad de solución del problema ( $P_{F_2h}$ ) se tiene el siguiente resultado de convergencia:

**Teorema 5.14.** *La solución del problema ( $P_{F_2h}$ ) converge a la solución del problema ( $P_{F_2}$ ) cuando  $\text{Bi} \rightarrow +\infty$ .*

*Demostración.* Es análoga a la del Teorema 5.12. ■

### 5.3.3. Solución del problema aproximado aplicando el método de balance integral refinado y análisis de su comportamiento asintótico

El método de balance integral refinado para resolver el problema  $(P_{F_h})$ , propone la resolución del problema aproximado formulado de la siguiente manera:

**Problema  $(P_{F_{3h}})$ :** Hallar la temperatura  $T_{F_{3h}} = T_{F_{3h}}(x, t)$ ,  $0 < x < s_{F_{3h}}(t)$ ,  $t > 0$  en la región líquida y la ubicación de la frontera libre  $x = s_{F_{3h}}(t)$ ,  $t \geq 0$  tal que se verifiquen las siguientes condiciones (5.78), (5.100)-(5.103).

Si se propone el perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial:

$$T_{F_{3h}}(x, t) = A_{F_{3h}}T_0 \left(1 - \frac{x}{s_{F_{3h}}(t)}\right) + B_{F_{3h}}T_0 \left(1 - \frac{x}{s_{F_{3h}}(t)}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq s_{F_{3h}}(t), \quad t > 0, \quad (5.123)$$

la frontera libre toma la forma

$$s_{F_{3h}}(t) = 2a\xi_{F_{3h}}\sqrt{t}, \quad t \geq 0, \quad (5.124)$$

y las condiciones (5.101) y (5.103) se satisfacen inmediatamente. Como en la sección anterior, las constantes  $A_{F_{3h}}$ ,  $B_{F_{3h}}$  y  $\xi_{F_{3h}}$  se determinan de las condiciones (5.78), (5.100) y (5.102), obteniéndose:

$$A_{F_{3h}} = \frac{2}{\text{Ste}}\xi_{F_{3h}}^2, \quad B_{F_{3h}} = \frac{-\frac{2}{\text{Ste}}\xi_{F_{3h}}^3 - \frac{1}{\text{Ste Bi}}\xi_{F_{3h}}^2 + \xi_{F_{3h}}}{\xi_{F_{3h}} + \frac{1}{\text{Bi}}}, \quad (5.125)$$

donde  $\xi_{F_{3h}}$  debe ser una solución positiva de la ecuación polinómica:

$$-(6\lambda + \frac{1}{\text{Bi}})z^3 - (6 + \text{Ste})z^2 + (6\lambda\text{Ste} - \frac{3}{\text{Bi}})z + 3\text{Ste} = 0, \quad z > 0. \quad (5.126)$$

Luego, por la regla de los signos de Descartes, se puede asegurar que (5.126) tiene una única solución positiva.

Así, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 5.15.** *La única solución del problema  $(P_{F_{3h}})$ , para un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial, está dada por (5.123)-(5.124), donde las constantes positivas  $A_{F_{3h}}$  y  $B_{F_{3h}}$  están definidas por (5.125) y  $\xi_{F_{3h}} > 0$  es la única solución de la ecuación polinómica (5.126).*

De la existencia y unicidad de solución del problema  $(P_{F_{3h}})$  se tiene el siguiente resultado de convergencia:

**Teorema 5.16.** *La solución del problema  $(P_{F_{3h}})$  converge a la solución del problema  $(P_{F_3})$  cuando  $\text{Bi} \rightarrow +\infty$ .*

*Demostración.* Es análoga a la del Teorema 5.12. ■

### 5.3.4. Comparaciones entre soluciones

Para comparar las soluciones obtenidas en  $(P_{Fh})$  y  $(P_{F_ih})$  con  $i = 1, 2, 3$ , se calcula el coeficiente que caracteriza la frontera libre en cada problema. El valor exacto de  $\xi_{Fh}$  y los aproximados  $\xi_{F_ih}$  con  $i = 1, 2, 3$ , se obtienen resolviendo las ecuaciones obtenidas en (5.111), (5.118), (5.122) y (5.126), respectivamente. En la Figura 5.3 se grafican los coeficientes  $\xi_{Fh}$  y  $\xi_{F_ih}$  en función de Bi con  $i = 1, 2, 3$ , respectivamente, para visualizar el comportamiento de la solución aproximada, fijando  $Ste = 0.5$  y  $\lambda = 0.7$ . Para que la convergencia mencionada en las subsecciones anteriores de  $\xi_{Fh} \rightarrow \xi_F$  y  $\xi_{F_ih} \rightarrow \xi_{F_i}$  pueda apreciarse cuando  $Bi \rightarrow +\infty$  también se grafica  $\xi_F$  y  $\xi_{F_i}$  con  $i = 1, 2, 3$  dados por (5.75), (5.88), (5.94) y (5.98), respectivamente, obtenidos en la sección anterior.

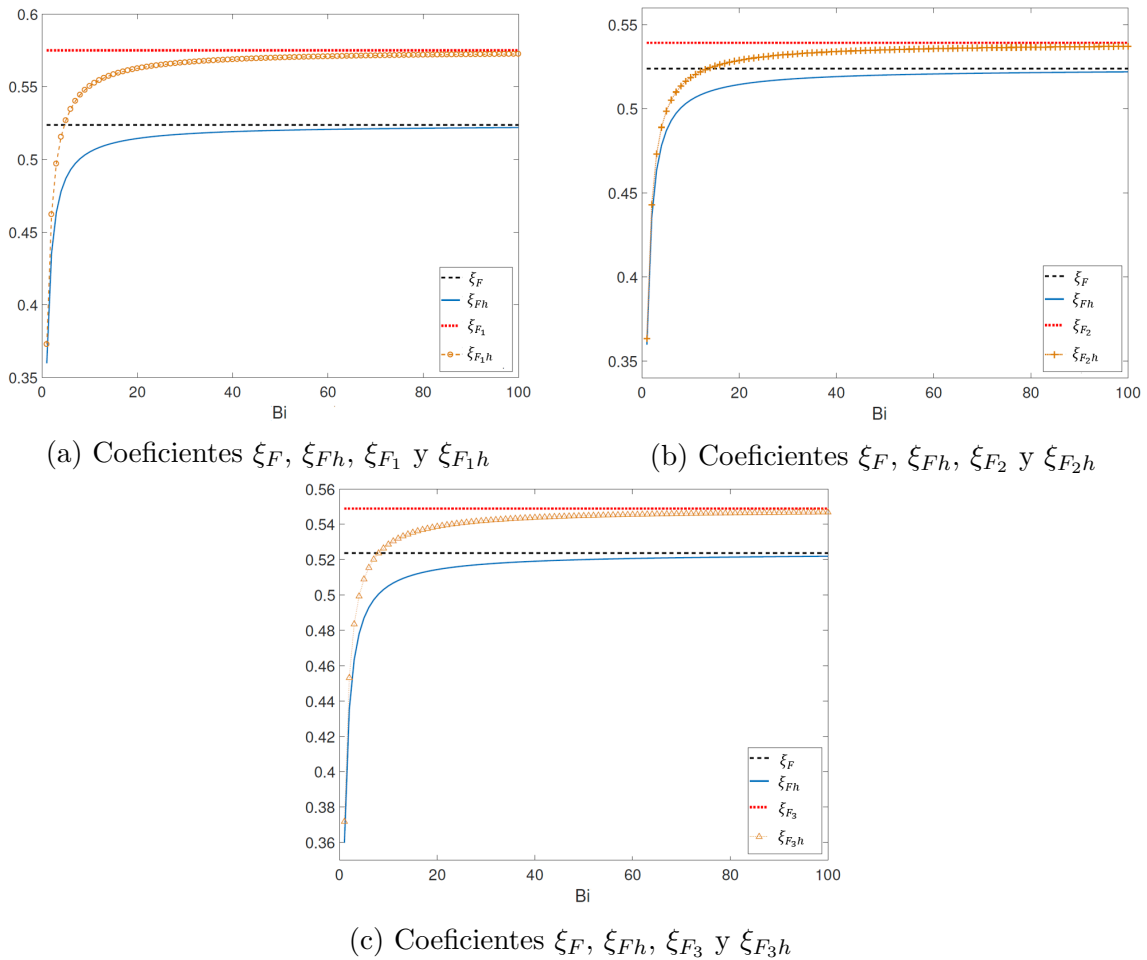


Figura 5.3: Coeficientes  $\xi_F$ ,  $\xi_{Fh}$ ,  $\xi_{F_i}$  y  $\xi_{F_ih}$  con  $i = 1, 2, 3$  en función de Bi para  $Ste = 0.5$  y  $\lambda = 0.7$ .

Se comparan además, para diferentes números Bi, el valor numérico del coeficiente  $\xi_{Fh}$  dado por (5.111) y las aproximaciones  $\xi_{F_ih}$  con  $i = 1, 2, 3$  dados por (5.118), (5.122) y (5.126), respectivamente. Para obtener qué técnica de balance integral da la mejor aproximación, se muestra en la Tabla 5.2, variando Bi entre 1 y 100, el coeficiente que caracteriza a la frontera libre exacta, y sus diferentes aproximaciones, mostrando también el error relativo porcentual cometido en cada caso  $E_{rel}(\xi_{F_ih}) = 100 \frac{|\xi_{F_ih} - \xi_{Fh}|}{|\xi_{Fh}|}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

De la Tabla 5.2, para los valores fijos  $Ste = 0.5$  y  $\lambda = 0.7$ , se puede apreciar que el



error cometido en cada aproximación aumenta cuando Bi se hace mayor. Notar que para los problemas  $(P_{F_1h})$ ,  $(P_{F_2h})$  y  $(P_{F_3h})$  el porcentaje de los errores no superan el 9.693 %, 2.906 % y 4.776 %, respectivamente.

Tabla 5.2: Coeficientes que caracterizan a la frontera libre y sus errores relativos.

Bi	$\xi_{Fh}$	$\xi_{F_1h}$	$E_{\text{rel}}(\xi_{F_1h})$	$\xi_{F_2h}$	$E_{\text{rel}}(\xi_{F_2h})$	$\xi_{F_3h}$	$E_{\text{rel}}(\xi_{F_3h})$
10	0.5051	0.5504	8.965 %	0.5185	2.657 %	0.5286	4.655 %
30	0.5175	0.5667	9.501 %	0.5322	2.840 %	0.5421	4.745 %
50	0.5200	0.5700	9.610 %	0.5350	2.878 %	0.5448	4.763 %
70	0.5211	0.5714	9.657 %	0.5362	2.894 %	0.5459	4.770 %
100	0.5219	0.5725	9.693 %	0.5371	2.906 %	0.5468	4.776 %

## 5.4. Soluciones aproximadas de un problema de Stefan a una fase con conductividad térmica no lineal dependiente de la temperatura y una condición de temperatura en el borde fijo

Se considera un problema de Stefan unidimensional a una fase para la fusión de un material semi-infinito  $x > 0$ , donde se impone una condición de temperatura en el borde fijo  $x = 0$  y la conductividad térmica es no lineal y variable dependiente de la temperatura  $T = T(x, t)$  dada por:

$$k(T) = \frac{\rho c}{(\beta + \delta T)^2}, \quad (5.127)$$

donde  $\beta$  y  $\delta$  son parámetros positivos,  $c > 0$  es el calor específico y  $\rho > 0$  es la densidad de masa del material. Este problema puede formularse matemáticamente de la siguiente manera:

**Problema  $(P_k)$ :** Hallar la temperatura  $T_k = T_k(x, t)$  en la región líquida  $0 < x < s_k(t)$ ,  $t > 0$  y la ubicación de la frontera libre  $x = s_k(t)$ ,  $t \geq 0$  tal que:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (5.128)$$

$$T(0, t) = T_0 > 0, \quad t > 0, \quad (5.129)$$

$$T(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (5.130)$$

$$k(T(s(t), t)) \frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) = -\rho \ell \dot{s}(t), \quad t > 0, \quad (5.131)$$

$$s(0) = 0, \quad (5.132)$$

donde  $\ell > 0$  es el calor latente de fusión del medio y  $T_0 > 0$  es la temperatura impuesta en el borde fijo  $x = 0$ .

En [147] se demostró la existencia y unicidad de una solución exacta de tipo de similitud del problema de frontera libre  $(P_k)$  para  $t \geq t_0 > 0$  con  $t_0$  un tiempo arbitrario positivo cuando los datos satisfacen la condición  $\beta c = \delta \ell$ .

La única solución exacta del problema (P<sub>k</sub>) viene dada por:

$$T_k(x, t) = \frac{1}{\delta} \left[ \frac{1}{\Theta(x, t)} - \beta \right], \quad 0 \leq x \leq s_k(t), \quad t > 0, \quad (5.133)$$

$$s_k(t) = \frac{2}{\beta} \xi_k \sqrt{t}, \quad t \geq 0, \quad (5.134)$$

donde  $\Theta$  es la única solución de la siguiente ecuación integral

$$\Theta(x, t) = \frac{1}{\beta} \left( 1 + \frac{\text{Ste}}{1 + \text{Ste}} \frac{\text{erf} \left( \frac{\int_0^x \frac{d\eta}{\Theta(\eta, t)} - \Lambda}{2\sqrt{t}} \right)}{\text{erf}(\Lambda)} \right), \quad 0 \leq x \leq s_k(t), \quad t > 0, \quad (5.135)$$

donde  $\text{Ste} = \frac{cT_0}{\ell} = \frac{\delta T_0}{\beta} > 0$  es el número de Stefan, para  $t \geq t_0 > 0$  con  $t_0$  un tiempo positivo arbitrario y  $\xi_k$  viene dado por

$$\xi_k = \frac{2\Lambda \exp(\Lambda^2)}{1 + \text{Ste}}, \quad (5.136)$$

con  $\Lambda$  la única solución positiva de la siguiente ecuación

$$z \exp(z^2) \text{erf}(z) = \frac{\text{Ste}}{\sqrt{\pi}}, \quad z > 0. \quad (5.137)$$

**Observación 5.1.** En [147] se demostró que la ecuación integral (5.135) es equivalente a resolver el siguiente problema diferencial de Cauchy en la variable  $x$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial x}(x, t) = \frac{\beta}{2\sqrt{t} \left[ 1 + \frac{\text{Ste}}{(1+\text{Ste}) \text{erf}(\Lambda)} \text{erf}(Y(x, t)) \right]}, & 0 < x < s(t), \quad t > 0, \\ Y(0, t) = -\Lambda, \end{cases} \quad (5.138)$$

donde

$$Y(x, t) = \frac{\int_0^x \frac{d\eta}{\Theta(\eta, t)} - \Lambda}{2\sqrt{t}} \quad (5.139)$$

con parámetro positivo  $t \geq t_0 > 0$  y  $\Lambda$  la única solución de (5.137).

En esta sección, se obtienen soluciones aproximadas del problema (P<sub>k</sub>) que surgen de aplicar el método de balance integral y dos variantes del mismo.

Como en las secciones anteriores, si se deriva con respecto a  $t$  la condición (5.130), usando (5.128) y (5.131), se obtiene la nueva condición:

$$k(T) \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 = \frac{\ell}{c} \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad \text{en} \quad x = s(t), \quad t > 0. \quad (5.140)$$

Además, de la ecuación (5.128) y las condiciones (5.129), (5.131) y (5.130) se tiene la condición integral:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} T(x, t) dx &= \int_0^{s(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) dx + T(s(t), t) \dot{s}(t) \\
&= \frac{1}{\rho c} \int_0^{s(t)} \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T(x, t)) \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \right) dx \\
&= \frac{1}{\rho c} \left[ k(T(s(t), t)) \frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) - k(T(0, t)) \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \right] \\
&= \frac{-1}{\rho c} \left[ \rho l \dot{s}(t) + k(T_0) \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \right], \quad t > 0. \tag{5.141}
\end{aligned}$$

También, de la ecuación (5.128) y las condiciones (5.129) y (5.130), se obtiene la condición integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^{s(t)} \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t}(\xi, t) d\xi dx &= \int_0^{s(t)} \int_0^x \frac{1}{\rho c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( k(T(\xi, t)) \frac{\partial T}{\partial \xi}(\xi, t) \right) d\xi dx \\
&= \int_0^{s(t)} \frac{1}{\rho c} \left[ k(T(x, t)) \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) - k(T_0) \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \right] dx \\
&= \frac{1}{\rho c} \int_0^{s(t)} \rho c \frac{\frac{\partial T}{\partial x}(x, t)}{(\beta + \delta T(x, t))^2} dx - s(t) \frac{k(T_0)}{\rho c} \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) \\
&= -\frac{T_0(1 + \text{Ste}) + s(t) \frac{\partial T}{\partial x}(0, t)}{\beta^2 (1 + \text{Ste})^2}, \quad 0 < x < s(t), t > 0. \tag{5.142}
\end{aligned}$$

Se prueba la existencia y unicidad de soluciones analíticas de los siguientes problemas aproximados que surgen de aplicar el método de balance integral clásico, el método de balance integral modificado y el método de balance integral refinado del problema de Stefan a una fase ( $P_k$ ):

† Problema ( $P_{k_1}$ ): aplicando el método de balance integral clásico queda definido por (5.129), (5.130), (5.132), (5.140) y (5.141).

† Problema ( $P_{k_2}$ ): aplicando el método de balance integral modificado queda definido por (5.129)-(5.132) y (5.141).

† Problema ( $P_{k_3}$ ): aplicando el método de balance integral refinado queda definido por (5.129)-(5.132) y (5.142).

Para la resolución de los problemas ( $P_{k_i}$ ) con  $i = 1, 2, 3$ , se propone un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial dado por:

$$\tilde{T}_k(x, t) = \tilde{A}_k T_0 \left( 1 - \frac{x}{\tilde{s}_k(t)} \right) + \tilde{B}_k T_0 \left( 1 - \frac{x}{\tilde{s}_k(t)} \right)^2, \quad 0 < x < \tilde{s}_k(t), \quad t > 0. \tag{5.143}$$

El hecho de conocer la solución exacta del problema  $(P_k)$ , es físicamente razonable imponerle a la temperatura aproximada dada por (5.143) que se comporte de manera similar a la exacta dada por (5.133); es decir: su signo, monotonía y convexidad en el espacio. Como  $T_k$  verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} 0 < T_k(x, t) < T_0, & \quad 0 < x < s_k(t), \quad t > 0, \\ \frac{\partial T_k}{\partial x}(x, t) = -\frac{T_0}{\beta \text{Ste}} \frac{1}{\Theta^2(x, t)} \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x, t) < 0, & \quad 0 < x < s_k(t), \quad t > 0, \\ \frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2}(x, t) = -\frac{T_0}{\beta \text{Ste}} \left( -\frac{2}{\Theta^3(x, t)} \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x, t) + \frac{1}{\Theta^2(x, t)} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}(x, t) \right) > 0, & \quad 0 < x < s_k(t), \quad t > 0, \end{aligned}$$

se le impone entonces a  $\tilde{T}_k$  las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} 0 < \tilde{T}_k(x, t) < T_0, & \quad 0 < x < \tilde{s}_k(t), \quad t > 0, \\ \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial x}(x, t) = -\frac{T_0}{\tilde{s}_k(t)} \left( \tilde{A}_k + 2\tilde{B}_k \left( 1 - \frac{x}{\tilde{s}_k(t)} \right) \right) < 0, & \quad 0 < x < \tilde{s}_k(t), \quad t > 0, \\ \frac{\partial^2 \tilde{T}_k}{\partial x^2}(x, t) = \frac{2\tilde{B}_k T_0}{\tilde{s}_k^2(t)} > 0, & \quad 0 < x < \tilde{s}_k(t), \quad t > 0. \end{aligned}$$

de donde se obtiene que ambas constantes  $\tilde{A}_k$  y  $\tilde{B}_k$  deben ser positivas.

De acuerdo al perfil adoptado (5.143), en virtud de (5.141), resulta

$$\tilde{s}_k(t) \dot{\tilde{s}}_k(t) \left( T_0 \left( \frac{\tilde{A}_k}{2} + \frac{\tilde{B}_k}{3} \right) + \frac{\ell}{c} \right) = \frac{T_0 \tilde{A}_k}{\beta(1 + \text{Ste})}, \quad t > 0, \quad (5.144)$$

y teniendo en cuenta (5.132), se obtiene que la frontera libre para los problemas aproximados  $(P_{k_1})$  y  $(P_{k_2})$ , está dada por

$$\tilde{s}_k(t) = \frac{2}{\beta} \tilde{\xi}_k \sqrt{t}, \quad t \geq 0, \quad (5.145)$$

donde  $\tilde{\xi}_k > 0$  es un parámetro desconocido a determinar.

Análogamente, para el problema  $(P_{k_3})$ , de la condición de Stefan (5.131) se tiene:

$$\tilde{s}_k(t) \dot{\tilde{s}}_k(t) = \frac{\text{Ste}}{\beta} \left( \tilde{A}_k + 2\tilde{B}_k \right), \quad t > 0, \quad (5.146)$$

y teniendo en cuenta (5.132), se obtiene que la frontera libre del problema aproximado que resulta de aplicar el método de balance integral refinado es también de la forma (5.145).

Así, puede observarse, que la frontera libre aproximada dada por (5.145) de los problemas  $(P_{k_i})$  con  $i = 1, 2, 3$ , tiene la misma forma de la frontera libre del problema exacto  $(P_k)$  dada por (5.134).

### 5.4.1. Solución explícita del problema aproximado aplicando el método de balance integral clásico

El método del balance integral clásico para resolver el problema ( $P_k$ ) propone la resolución de un problema aproximado definido de la siguiente manera:

**Problema ( $P_{k_1}$ ):** Hallar la temperatura  $T_{k_1} = T_{k_1}(x, t)$ ,  $0 < x < s_{k_1}(t)$ ,  $t > 0$  en la región líquida y la ubicación de la frontera libre  $x = s_{k_1}(t)$ ,  $t \geq 0$  tal que se verifiquen las condiciones (5.129), (5.130), (5.132), (5.140) y (5.141).

Para el perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial:

$$T_{k_1}(x, t) = T_0 A_{k_1} \left(1 - \frac{x}{s_{k_1}(t)}\right) + T_0 B_{k_1} \left(1 - \frac{x}{s_{k_1}(t)}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq s_{k_1}(t), \quad t > 0, \quad (5.147)$$

la frontera libre toma la forma

$$s_{k_1}(t) = \frac{2}{\beta} \xi_{k_1} \sqrt{t}, \quad t \geq 0, \quad (5.148)$$

donde las las condiciones (5.130) y (5.132) se verifican inmediatamente.

De la condición (5.129) se obtiene:

$$A_{k_1} + B_{k_1} = 1, \quad (5.149)$$

y del hecho que

$$\frac{d}{dt} \int_0^{s_{k_1}(t)} T(x, t) dx = \frac{T_0}{\beta \sqrt{t}} \left( \frac{A_{k_1}}{2} + \frac{B_{k_1}}{3} \right) \xi_{k_1},$$

de la condición (5.141) se tiene que

$$\left( \frac{A_{k_1}}{2} + \frac{B_{k_1}}{3} \right) \xi_{k_1} = -\frac{\xi_{k_1}}{\text{Ste}} + \frac{A_{k_1} + 2B_{k_1}}{2(1 + \text{Ste})^2 \xi_{k_1}}. \quad (5.150)$$

Por lo tanto, de (5.149) y (5.150), se obtiene:

$$A_{k_1} = \frac{2[3\text{Ste} - (1 + \text{Ste})^2 \xi_{k_1}^2 (\text{Ste} + 3)]}{\text{Ste}[(1 + \text{Ste})^2 \xi_{k_1}^2 + 3]}, \quad B_{k_1} = \frac{3[-\text{Ste} + (1 + \text{Ste})^2 \xi_{k_1}^2 (\text{Ste} + 2)]}{\text{Ste}[(1 + \text{Ste})^2 \xi_{k_1}^2 + 3]}. \quad (5.151)$$

Como  $A_{k_1} > 0$  y  $B_{k_1} > 0$  se tiene que  $0 < \xi_{k_1} < \xi_{k_1}^{\max}$  y  $\xi_{k_1} > \xi_{k_1}^{\min} > 0$ , respectivamente donde:

$$\xi_{k_1}^{\min} = \sqrt{\frac{\text{Ste}}{(1 + \text{Ste})^2 (2 + \text{Ste})}}, \quad \xi_{k_1}^{\max} = \sqrt{\frac{3\text{Ste}}{(1 + \text{Ste})^2 (3 + \text{Ste})}}.$$

Dado que

$$\frac{\partial T_{k_1}}{\partial x}(s_{k_1}(t), t) = -\frac{A_{k_1} \beta T_0}{2 \xi_{k_1} \sqrt{t}}, \quad \frac{\partial^2 T_{k_1}}{\partial x^2}(s_{k_1}(t), t) = \frac{B_{k_1} \beta^2 T_0}{2 \xi_{k_1}^2 t},$$

de la condición (5.140) resulta

$$A_{k_1}^2 = \frac{2}{3\text{Ste}} B_{k_1},$$

y al sustituir los valores de  $A_{k_1}$  y  $B_{k_1}$  dados por (5.151) en la expresión anterior, resulta que  $\xi_{k_1}$  debe solución de la ecuación polinómica de cuarto grado:

$$(1 + \text{Ste})^4 (2\text{Ste}^2 + 11\text{Ste} + 16) z^4 - 2(1 + \text{Ste})^2 (6\text{Ste}^2 + 19\text{Ste} + 3) z^2 + 3\text{Ste}(1 + 6\text{Ste}) = 0, \quad 0 < \xi^{\min} < z < \xi^{\max}. \quad (5.152)$$

Llamando  $Q_1 = Q_1(z)$  a la función polinómica definida por el lado izquierdo de la ecuación (5.152), es fácil ver que  $Q_1$  tiene solo dos raíces positivas. Además:

$$Q_1(\xi^{\min}) = \frac{2\text{Ste}^2(2\text{Ste}+3)^2}{(2+\text{Ste})^2} > 0, \quad Q_1(\xi^{\max}) = -\frac{3\text{Ste}(2\text{Ste}+3)^2}{(3+\text{Ste})^2} < 0, \quad Q_1(+\infty) = +\infty.$$

Por lo tanto,  $Q_1$  tiene una única raíz en  $(\xi^{\min}, \xi^{\max})$  y está dada explícitamente por

$$\xi_{k_1} = \left( \frac{(\text{Ste}+1)^2 (6\text{Ste}^2+19\text{Ste}+3) - \sqrt{6\text{Ste}+1} (2\text{Ste}^2+5\text{Ste}+3)}{(\text{Ste}+1)^4 (2\text{Ste}^2+11\text{Ste}+16)} \right)^{1/2}. \quad (5.153)$$

Todo el análisis anterior se puede resumir en el siguiente resultado:

**Teorema 5.17.** *La única solución del problema  $(P_{k_1})$ , para un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial, viene dada por (5.147)-(5.148) donde las constantes positivas  $A_{k_1}$  y  $B_{k_1}$  están definidas por (5.151) y  $\xi_{k_1}$  viene dado explícitamente por (5.153).*

### 5.4.2. Solución explícita del problema aproximado aplicando el método de balance integral modificado

El método del balance integral modificado para resolver el problema  $(P_k)$  propone la resolución de un problema aproximado definido de la siguiente manera:

**Problema  $(P_{k_2})$ :** Hallar la temperatura  $T_{k_2} = T_{k_2}(x, t)$ ,  $0 < x < s_{k_2}(t)$ ,  $t > 0$  en la región líquida y la ubicación de la frontera libre  $x = s_{k_2}(t)$ ,  $t \geq 0$  tal que se verifiquen las condiciones (5.129)-(5.132) y (5.141).

Para el perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial:

$$T_{k_2}(x, t) = T_0 A_{k_2} \left( 1 - \frac{x}{s_{k_2}(t)} \right) + T_0 B_{k_2} \left( 1 - \frac{x}{s_{k_2}(t)} \right)^2, \quad 0 \leq x \leq s_{k_2}(t), \quad t > 0, \quad (5.154)$$

la frontera libre toma la forma

$$s_{k_2}(t) = \frac{2}{\beta} \xi_{k_2} \sqrt{t}, \quad t \geq 0, \quad (5.155)$$

y se verifican las condiciones (5.130) y (5.132) inmediatamente.

De manera similar a lo realizado en la subsección anterior, las constantes  $A_{k_2}$  y  $B_{k_2}$  se determinan de las condiciones (5.129) y (5.141), obteniéndose:

$$A_{k_2} = \frac{2\xi_{k_2}^2}{\text{Ste}}, \quad B_{k_2} = 1 - \frac{2\xi_{k_2}^2}{\text{Ste}}. \quad (5.156)$$

Como las constantes  $A_{k_2}$  y  $B_{k_2}$  deben ser positivas entonces  $0 < \xi_{k_2} < \sqrt{\frac{\text{Ste}}{2}}$ . Además, usando la condición (5.131) el coeficiente  $\xi_{k_2}$  debe ser una solución positiva de la ecuación polinómica de cuarto grado dada por:

$$(1 + \text{Ste})^2 z^4 + (6 + 7\text{Ste} + 5\text{Ste}^2 + \text{Ste}^3) z^2 - 3\text{Ste} = 0, \quad 0 < z < \sqrt{\frac{\text{Ste}}{2}},$$

cuya única solución es:

$$\xi_{k_2} = \left( \frac{-(6+7\text{Ste}+5\text{Ste}^2+\text{Ste}^3) + \sqrt{(6+7\text{Ste}+5\text{Ste}^2+\text{Ste}^3)^2 + 12\text{Ste}(1+\text{Ste})^2}}{2(1+\text{Ste})^2} \right)^{1/2}. \quad (5.157)$$

Todo este análisis se puede resumir en el siguiente resultado:

**Teorema 5.18.** *La única solución del problema  $(P_{k_2})$ , para un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial viene dada por (5.154)-(5.155) donde las constantes positivas  $A_{k_2}$  y  $B_{k_2}$  están definidas por (5.156) y  $\xi_{k_2}$  viene dado explícitamente por (5.157).*

### 5.4.3. Solución explícita del problema aproximado aplicando el método de balance integral refinado

El método del balance integral refinado para resolver el problema  $(P_k)$  propone la resolución de un problema aproximado definido de la siguiente manera:

**Problema  $(P_{k_3})$ :** Hallar la temperatura  $T_{k_3} = T_{k_3}(x, t)$ ,  $0 < x < s_{k_3}(t)$ ,  $t > 0$  en la región líquida y la ubicación de la frontera libre  $x = s_{k_3}(t)$ ,  $t \geq 0$  tal que se verifiquen las condiciones (5.129)-(5.132) y (5.142).

Si se propone el perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial:

$$T_{k_3}(x, t) = T_0 A_{k_3} \left(1 - \frac{x}{s_{k_3}(t)}\right) + T_0 B_{k_3} \left(1 - \frac{x}{s_{k_3}(t)}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq s_{k_3}(t), \quad t > 0, \quad (5.158)$$

la frontera libre toma la forma

$$s_{k_3}(t) = \frac{2}{\beta} \xi_{k_3} \sqrt{t}, \quad t \geq 0, \quad (5.159)$$

y las condiciones (5.130) y (5.132) se verifican inmediatamente.

De manera similar a los realizado anteriormente, las constantes  $A_{k_3}$  y  $B_{k_3}$  se determinan de las condiciones (5.129) y (5.142), y del hecho que:

$$\int_0^{s_{k_3}(t)} \int_0^x \frac{\partial T_{k_3}}{\partial t}(\xi, t) d\xi dx = \frac{T_0(A_{k_3} + B_{k_3})}{3\beta^2} \xi_{k_3}^2,$$

se obtiene:

$$A_{k_3} = \frac{2\xi_{k_3}^2}{\text{Ste}}, \quad B_{k_3} = 1 - \frac{2}{\text{Ste}} \xi_{k_3}^2. \quad (5.160)$$

Como se sabe  $A_{k_3}$  y  $B_{k_3}$  deben ser positivas por lo que resulta  $0 < \xi_{k_3} < \sqrt{\frac{\text{Ste}}{2}}$ . Además, usando la condición (5.131), resulta que el coeficiente  $\xi_{k_3}$  debe ser una solución positiva de la ecuación polinómica de cuarto grado dada por:

$$(\text{Ste}^3 + 2\text{Ste}^2 + \text{Ste} + 6) z^2 + 3\text{Ste}(\text{Ste} - 1) = 0, \quad 0 < z < \sqrt{\frac{\text{Ste}}{2}}.$$

Es fácil ver que la ecuación anterior tiene una única solución si y solo si  $0 < Ste < 1$  y viene dada explícitamente por:

$$\xi_{k_3} = \left( \frac{3Ste(1 - Ste)}{Ste^3 + 2Ste^2 + Ste + 6} \right)^{1/2}. \quad (5.161)$$

Todo el análisis anterior se puede resumir en el siguiente resultado:

**Teorema 5.19.** *La única solución del problema  $(P_{k_3})$ , para un perfil de temperatura cuadrático en la variable espacial, viene dada por (5.158)-(5.159) donde las constantes positivas  $A_{k_3}$  y  $B_{k_3}$  están definidas por (5.160) y  $\xi_{k_3}$  viene dado explícitamente por (5.161) si y solo si  $0 < Ste < 1$ .*

#### 5.4.4. Comparaciones entre soluciones

En las subsecciones 5.4.1, 5.4.2 y 5.4.3 se han aplicado tres métodos diferentes: balance integral clásico, balance integral modificado y balance integral refinado para aproximar la solución del problema de Stefan con una conductividad térmica no lineal dependiente de la temperatura  $(P_k)$ .

Para analizar la precisión de la solución aproximada se compara el coeficiente adimensional  $\xi_{k_1}$  dado en (5.153) con el coeficiente exacto  $\xi_k$  dado por (5.136) para valores de  $0 < Ste < 1$  (ver Figura 5.4a). Además, en la Figura 5.4b, se muestra el perfil de temperatura de la solución aproximada y la exacta en  $t = 10$  s, para los parámetros  $Ste = 0.4$ ,  $\beta = 1\sqrt{s}/m$  y  $T_0 = 3^\circ C$ .

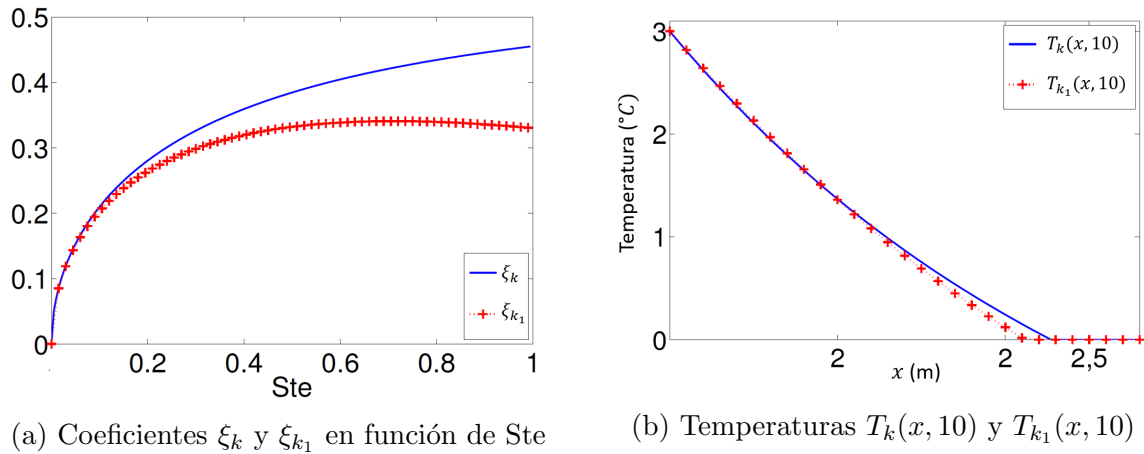


Figura 5.4: (a) Coeficientes  $\xi_k$  y  $\xi_{k_1}$  en función de  $Ste$  (b) Temperaturas  $T_k$  y  $T_{k_1}$  en función de  $x$  en  $t = 10$  s para  $Ste = 0.4$ ,  $\beta = 1\sqrt{s}/m$ ,  $T_0 = 3^\circ C$ .

La Figura 5.5a muestra, para valores de Stefan menores a 1, cómo el coeficiente adimensional  $\xi_{k_2}$ , que caracteriza la ubicación de la frontera libre  $s_{k_2}$ , se aproxima al coeficiente  $\xi_k$ , correspondiente a la frontera libre exacta  $s_k$ . Además, en la Figura 5.5b, se muestra el perfil de temperatura de la solución aproximada y de la exacta en  $t = 10$  s para los parámetros  $Ste = 0.4$ ,  $\beta = 1\sqrt{s}/m$  y  $T_0 = 3^\circ C$ .



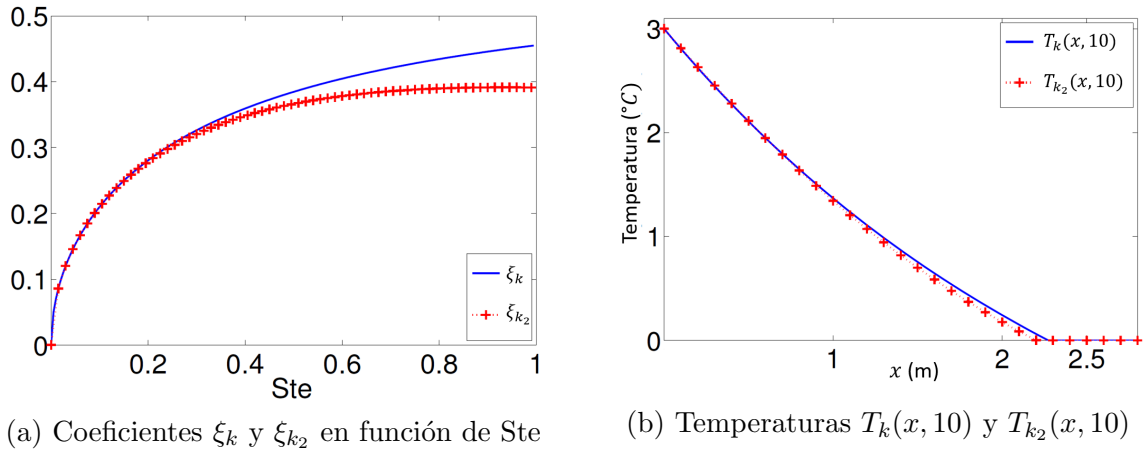


Figura 5.5: (a) Coeficientes  $\xi_k$  y  $\xi_{k_2}$  en función de  $Ste$  (b) Temperaturas  $T_k$  y  $T_{k_2}$  en función de  $x$  en  $t = 10$  s para  $Ste = 0.4$ ,  $\beta = 1 \sqrt{\text{s/m}}$ ,  $T_0 = 3^\circ\text{C}$ .

Para cada valor de  $0 < Ste < 1$ , se grafica ahora el valor numérico del coeficiente adimensional  $\xi_{k_3}$  y el coeficiente exacto  $\xi_k$  en función de  $Ste$  (Fig 5.6a). Se puede observar que el método de balance integral refinado da como resultado valores cercanos a la solución exacta del problema ( $P_k$ ), sólo para valores pequeños del número de Stefan. Además, en la Figura 5.6b, se muestra el perfil de temperatura de la solución aproximada y la exacta en  $t = 10$  s para los parámetros  $Ste = 0.4$ ,  $\beta = 1 \sqrt{\text{s/m}}$  y  $T_0 = 3^\circ\text{C}$ .

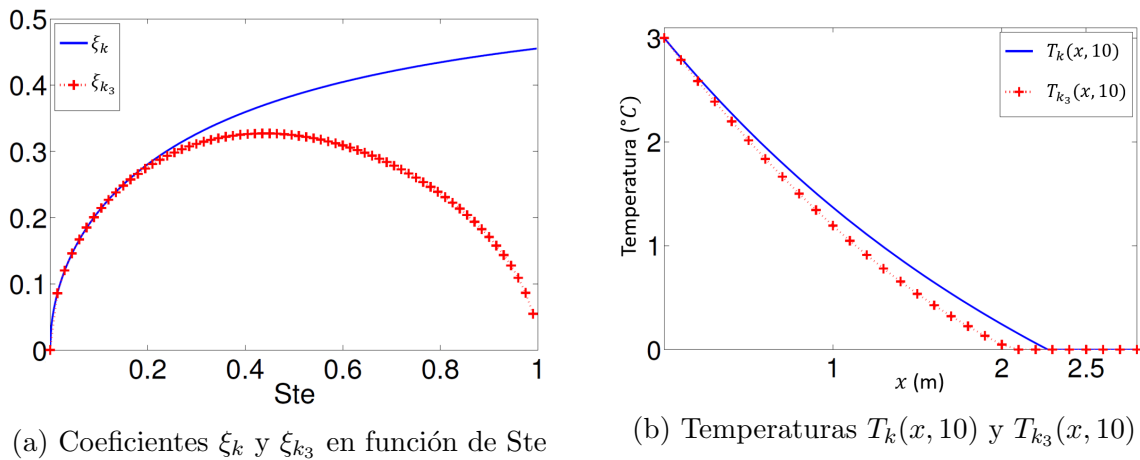


Figura 5.6: (a) Coeficientes  $\xi_k$  y  $\xi_{k_3}$  en función de  $Ste$  (b) Temperaturas  $T_k$  y  $T_{k_3}$  en función de  $x$  en  $t = 10$  s para  $Ste = 0.4$ ,  $\beta = 1 \sqrt{\text{s/m}}$ ,  $T_0 = 3^\circ\text{C}$ .

El objetivo ahora es presentar, para diferentes números de Stefan, el valor numérico del coeficiente exacto  $\xi_k$  dado por (5.136) y los coeficientes aproximados  $\xi_{k_1}$ ,  $\xi_{k_2}$  y  $\xi_{k_3}$  dados por las expresiones analíticas (5.153), (5.157) y (5.161), respectivamente. Esos cálculos permiten no sólo comparar las soluciones aproximadas con la exacta, sino también comparar los diferentes métodos entre ellos para mostrar qué técnica brinda la mejor aproximación. Con ese propósito, se muestra en la Tabla 3, para diferentes valores de  $Ste$ , el parámetro adimensional exacto  $\xi_k$ , el parámetro adimensional aproximado  $\xi_{k_i}$  y el error relativo porcentual  $E_{\text{rel}}(\xi_{k_i}) = 100 \left| \frac{\xi_k - \xi_{k_i}}{\xi_k} \right|$ , con  $i = 1, 2, 3$ .

Puede notarse en la Tabla 5.3 que el error relativo cometido en cada técnica aproximada aumenta cuando el número de Stefan se hace mayor alcanzando los porcentajes 19.41 %, 12.2 % y 61.66 % para los problemas  $(P_{k_1})$ ,  $(P_{k_2})$  y  $(P_{k_3})$ , respectivamente.

A partir de este hecho, en la Tabla 5.4, se estudia el comportamiento de los diferentes valores para  $Ste \ll 1$ . En este caso los errores relativos para el problema  $(P_{k_i})$  con  $i = 1, 2, 3$ , no superan el 0.5 %.

Tabla 5.3: Coeficientes de la frontera libre y sus errores relativos para  $0 < Ste < 1$

Ste	$\xi_k$	$\xi_{k_1}$	$E_{rel}(\xi_{k_1})$	$\xi_{k_2}$	$E_{rel}(\xi_{k_2})$	$\xi_{k_3}$	$E_{rel}(\xi_{k_3})$
0.1	0.2099	0.2099	0.037 %	0.2100	0.018 %	0.2100	0.042 %
0.2	0.2805	0.2754	1.803 %	0.2788	0.608 %	0.2763	1.498 %
0.3	0.3262	0.3126	4.194 %	0.3207	1.697 %	0.3112	4.622 %
0.4	0.3593	0.3348	6.809 %	0.3481	3.110 %	0.3258	9.330 %
0.5	0.3846	0.3482	9.470 %	0.3663	4.741 %	0.3244	15.63 %
0.6	0.4046	0.3557	12.09 %	0.3782	6.515 %	0.3091	23.60 %
0.7	0.4209	0.3593	14.63 %	0.3856	8.375 %	0.2802	33.41 %
0.8	0.4343	0.3602	17.07 %	0.3897	10.28 %	0.2364	45.58 %
0.9	0.4457	0.3592	19.41 %	0.3913	12.20 %	0.1709	61.66 %

Tabla 5.4: Coeficientes de la frontera libre y sus errores relativos para  $Ste \ll 1$

Ste	$\xi_k$	$\xi_{k_1}$	$E_{rel}(\xi_{k_1})$	$\xi_{k_2}$	$E_{rel}(\xi_{k_2})$	$\xi_{k_3}$	$E_{rel}(\xi_{k_3})$
0.01	0.0702	0.0703	0.142 %	0.0703	0.037 %	0.0703	0.075 %
0.02	0.0987	0.0989	0.241 %	0.0988	0.066 %	0.0988	0.135 %
0.03	0.1201	0.1205	0.302 %	0.1202	0.086 %	0.1203	0.178 %
0.04	0.1378	0.1382	0.329 %	0.1379	0.099 %	0.1381	0.206 %
0.05	0.1531	0.1536	0.326 %	0.1532	0.103 %	0.1534	0.219 %
0.06	0.1666	0.1671	0.296 %	0.1668	0.101 %	0.1670	0.215 %
0.07	0.1789	0.1793	0.242 %	0.1790	0.090 %	0.1792	0.196 %
0.08	0.1901	0.1904	0.167 %	0.1902	0.073 %	0.1904	0.160 %
0.09	0.2004	0.2005	0.073 %	0.2005	0.049 %	0.2006	0.109 %

Por último, en la Figura 5.7, se comparan los errores absolutos de las temperaturas aproximadas dadas por  $E_{abs}(T_{k_i}(x, t)) = |T_k(x, t) - T_{k_i}(x, t)|$ ,  $i = 1, 2, 3$ , en función de la posición  $x$  en  $t = 10$  s, para  $Ste = 0.4$ ,  $\beta = 1 \sqrt{s/m}$  y  $T_0 = 3^\circ C$ . Se grafica hasta  $x = s_{k_3}(10) = \min \{s_{k_1}(10), s_{k_2}(10), s_{k_3}(10)\}$ , para comparar los errores absolutos de los diferentes métodos en el dominio común.

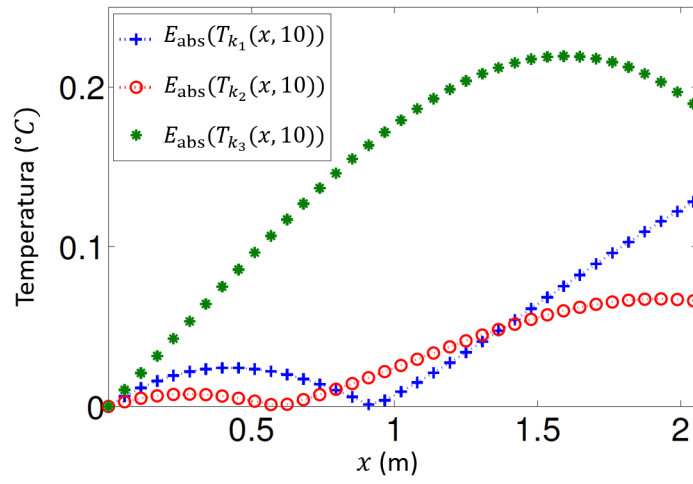


Figura 5.7: Errores absolutos de las temperaturas  $T_{k_i}$  con  $i = 1, 2, 3$  en función de  $x$  en  $t = 10$  s, para  $Ste = 0.4$ ,  $\beta = 1 \sqrt{s}/m$  y  $\theta_0 = 3^\circ C$ .

# Conclusiones

En esta Tesis se han obtenido soluciones exactas de problemas de Stefan sobre materiales unidimensionales, semi-infinitos, homogéneos e isotrópicos con conductividad térmica y calor específico variables y dependientes de la temperatura y soluciones analíticas aproximadas de algunos casos particulares de estos problemas, complementando los trabajos iniciados en [16, 30, 51, 56, 66, 68, 96, 123, 144, 147, 164, 172, 185, 188, 196, 197, 199]

En primer lugar, y debido a los avances tecnológicos, se mostró cómo se han comenzado a adoptar modelos más reales de representación de los coeficientes térmicos considerándolos variables y dependientes de la temperatura. Se presentaron diferentes argumentos de la Termodinámica que motivan a resolver problemas de Stefan con coeficientes térmicos variables como por ejemplo, el mecanismo de conducción térmica de un gas y las aletas diseñadas físicamente para aumentar el área de superficie en contacto con el fluido refrigerante que rodea el medio previsto.

Luego, y motivado por [30, 51, 123], se consideraron problemas de Stefan unidimensionales a una fase para la fusión de un material semi-infinito con conductividad térmica y calor específico dependientes de la temperatura de los que se obtuvieron soluciones exactas de tipo similaridad imponiendo condiciones de tipo Dirichlet, de tipo Neumann o de tipo Robin en el borde fijo. Se demostró el comportamiento asintótico de la solución del problema con condición de tipo Robin en el borde fijo, recuperando la solución del problema con condición de tipo Dirichlet en el borde fijo. A continuación, se generalizaron resultados obtenidos en [66], donde se estudiaron problemas de conducción de calor definidos a partir de problemas de Stefan unidimensionales a una fase para la solidificación de un material semi-infinito con conductividad térmica dependiente de la temperatura con una condición de tipo Dirichlet o una condición de tipo Robin en el borde fijo, de los cuales se demostró existencia y unicidad de solución de los mismos a través de la resolución de problemas diferenciales ordinarios de segundo orden obteniéndose la denominada función de error modificada  $p$ -generalizada. Se realizó además, un análisis del comportamiento asintótico de la solución del problema de transferencia de calor con condición de tipo Robin en el borde fijo, recuperando la solución del problema con condición de tipo Dirichlet en el borde fijo.

Posteriormente, y motivado por [51, 56, 172], se demostró la existencia y unicidad de solución de tipo similaridad de problemas de Stefan unidimensionales a una fase para la fusión de un material semi-infinito gobernados por una ecuación no clásica y no lineal del calor con diferentes tipos de fuentes de calor donde se asumió una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo y, la conductividad térmica y el calor específico se consideraron variables y dependientes de la temperatura.

Después, se generalizaron resultados obtenidos en [144, 196, 199], hallando soluciones exactas de tipo similaridad a problemas de Stefan unidimensionales a dos fases en un

dominio angular para la solidificación de un material semi-infinito con conductividad térmica y calor específico dependientes de la temperatura con condiciones de borde de tipo Dirichlet o de tipo Neumann. También, y motivado por [16, 68, 188], se obtuvieron fórmulas explícitas para los coeficientes desconocidos en el proceso de cambio de fase, bajo ciertas condiciones necesarias y suficientes sobre los datos del problema con condición de tipo Dirichlet al que se le impone una sobrecondición de tipo Neumann.

Finalmente, y motivado por [56, 96, 147, 164, 185, 197], se obtuvieron soluciones analíticas aproximadas para algunos casos particulares de los problemas de Stefan a una fase con condiciones de tipo Dirichlet o de tipo Robin en el borde fijo estudiados previamente. Para obtener dichas aproximaciones se utilizaron los métodos de balance integral clásico, una variante del mismo y el método de balance integral refinado. Se compararon las distintas aproximaciones obtenidas con las soluciones exactas correspondientes y se analizaron los errores cometidos en cada método.

# Bibliografía

- [1] S. Akhtar, M. Xu, and A. P. Sasmito. Development and validation of a semi-analytical framework for droplet freezing with heterogeneous nucleation and non-linear interface kinetics. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 166, 2021.
- [2] V. Alexiades and A. D. Solomon. *Mathematical modeling of melting and freezing processes*. Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1993.
- [3] A. Aljehani, L. C. Nitsche, and S. Al-Hallaj. Numerical modeling of transient heat transfer in a phase change composite thermal energy storage (pcc-tes) system for air conditioning applications. *Applied Thermal Engineering*, 164, 2020.
- [4] I. L. Animasaun. Effects of thermophoresis, variable viscosity and thermal conductivity on free convective heat and mass transfer of non-darcian MHD dissipative casson fluid flow with suction and nth order of chemical reaction. *Journal of the Nigerian Mathematical Society*, 34:11–31, 2015.
- [5] I. L. Animasaun. Melting heat and mass transfer in stagnation point micropolar fluid flow of temperature dependent fluid viscosity and thermal conductivity at constant vortex viscosity. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 25:79–85, 2017.
- [6] K. Arai, S. Kapoor, and R. Bhatia (Eds). *Proceeding of the Future Technologies Conference (FTC) 2020*. Advances in Intelligent Systems and Computing, Switzerland, 2021.
- [7] I. Athanasopoulos, G. Makrakis, and J. F. Rodrigues (Eds). *Free Boundary Problems: Theory and Applications*. CRC Press, Boca Raton, 1999.
- [8] V. Barbu, I. Ciotir, and I. Danaila. Existence and Uniqueness of Solution to the Two-Phase Stefan Problem with Convection. *Applied Mathematics and Optimization*, 84:123–157, 2021.
- [9] G. I. Barenblatt. *Scaling, self-similarity and intermediate asymptotics*. Cambridge University Press, Washington, 1996.
- [10] D. A. Barry and G. C Sander. Exact solutions for water infiltration with an arbitrary surface flux or nonlinear solute adsorption. *Water Resources Research*, 27:2667–2680, 1991.

- [11] Y. Belhamadia, G. O. Cassol, and S. Dubljevic. Numerical modelling of hyperbolic phase change problems: Application to continuous casting. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 209, 2023.
- [12] A. Belozarov and Y. D. Shikhmurzaev. The onset of solidification: From interface formation to the Stefan regime. *The Journal of Chemical and Physics*, 156, 2022.
- [13] L. R. Berrone, D. A. Tarzia, and L. T. Villa. Asymptotic behaviour of a non-classical heat conduction problem for a semi-infinite material. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 23:1161–1177, 2000.
- [14] L. Bigler, M. Peszynska, and N. Vohra. Heterogeneous Stefan problem and permafrost models with p0-p0 finite elements and fully implicit monolithic solver. *Electronic Research Archive*, 30:1477–1531, 2022.
- [15] G. Bluman and S. Kumei. On the remarkable nonlinear diffusion equation. *Journal of Mathematical Physics*, 21:1019–1023, 1980.
- [16] J. Bollati, A. Briozzo, and M. Natale. Determination of unknown thermal coefficients in a non-classical Stefan problem. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 67, 2022.
- [17] J. Bollati, A. Briozzo, and M. Natale. Analytical solution for a cylinder glaciation model with variable latent heat and thermal. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 150, 2023.
- [18] J. Bollati and A. C. Briozzo. Stefan problems for the diffusion-convection equation with temperature-dependent thermal coefficients. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 134, 2021.
- [19] J. Bollati, A. C. Briozzo, and M. S. Gutierrez. Integral formulation for a Stefan problem with spherical symmetry. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 72:72–98, 2021.
- [20] J. Bollati, C. M. Gariboldi, and D. A. Tarzia. Explicit solutions for distributed, boundary and distributed-boundary elliptic optimal control problems. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 64:283–311, 2020.
- [21] J. Bollati, M. F. Natale, J. A. Semitiel, and D. A. Tarzia. *Approximate solutions to the one-phase Stefan problem with temperature-dependent thermal conductivity*, chapter 1, In Heat Conduction: Methods, Applications and Research, pages 1–20. J. Hristov- R. Bennacer (Eds.), Nova Science Publishers, Inc., 2019.
- [22] J. Bollati, M. F. Natale, J. A. Semitiel, and D. A. Tarzia. Existence and uniqueness of solution for two one-phase Stefan problems with variable thermal coefficients. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 51:103001, 2020.
- [23] J. Bollati, M. F. Natale, J. A. Semitiel, and D. A. Tarzia. Existence and uniqueness of the p-generalized modified error function. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2020:1–11, 2020.

- [24] J. Bollati, M. F. Natale, J. A. Semitiel, and D. A. Tarzia. Integral balance methods applied to non-classical Stefan problems. *Thermal Science*, 24:1229–1241, 2020.
- [25] J. Bollati, M. F. Natale, J. A. Semitiel, and D. A. Tarzia. Exact solution for non-classical one-phase Stefan problem with variable thermal coefficients and two different heat source terms. *Computational and Applied Mathematics*, 41:1–11, 2022.
- [26] J. Bollati, M. F. Natale, J. A. Semitiel, and D. A. Tarzia. Determination of one unknown coefficient in a two-phase free boundary problem in an angular domain. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 531:127775, 2024.
- [27] J. Bollati, J. A. Semitiel, and D. A. Tarzia. Heat balance integral methods applied to the one-phase Stefan problem with a convective boundary condition at the fixed face. *Applied Mathematics and Computation*, 331:1–19, 2018.
- [28] J. Bollati and D. A. Tarzia. Exact solution for a two-phase Stefan problem with variable latent heat and a convective boundary condition at the fixed face. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 69-38:1–15, 2018.
- [29] J. Bollati and D. A. Tarzia. Explicit solution for the one-phase Stefan problem with latent heat depending on the position and a convective boundary condition at the fixed face. *Communications in Applied Analysis*, 22:309–332, 2018.
- [30] J. Bollati and D. A. Tarzia. One-phase Stefan-like problems with a latent heat depending on the position and velocity of the free boundary, and with Neumann or Robin boundary conditions at the fixed face. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018:1–11, 2018.
- [31] J. Bollati and D. A. Tarzia. One-phase Stefan problem with a latent heat depending on the position of the free boundary and its rate of change. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018-10:1–12, 2018.
- [32] J. Bollati and D. A. Tarzia. Approximate solutions to one-phase Stefan-like problems with space-dependent latent heat. *European Journal of Applied Mathematics*, 2020:1–33, 2020.
- [33] J. Bollati and D. A. Tarzia. Approximate solutions to one-phase Stefan-like problems with a space-dependent latent heat. *European Journal of Applied Mathematics*, 32:337–369, 2021.
- [34] L. Bougoffa. A note on the existence and uniqueness solutions of the modified error function. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2018:1–9, 2018.
- [35] L. Bougoffa, S. Bougouffa, and A. Khanfer. An Analysis of the One-Phase Stefan Problem with Variable Thermal Coefficients of Order  $p$ . *Axioms*, 12, 2023.
- [36] L. Bougoffa and A. Khanfer. On the solutions of a phase change problem with temperature-dependent thermal conductivity and specific heat. *Results in Physics*, 10, 2020.



- [37] L. Bougoffa and A. Khanfer. Solution of non-classical Stefan problem with nonlinear thermal coefficients and a Robin boundary condition. *AIMS Mathematics*, 6:6569–6579, 2021.
- [38] L. Bougoffa, R. C. Rach, and A. Mennouni. On the existence, uniqueness, and new analytic approximate solution of the modified error function in two-phase Stefan problems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44:10948–10956, 2021.
- [39] M. Boukrouche and D. A. Tarzia. Non-classical heat conduction problem with nonlocal source. *Boundary Value Problems*, 2017:1–14, 2017.
- [40] M. Boukrouche and D. A. Tarzia. A heat conduction problem with sources depending on the average of the heat flux on the boundary. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 61:87–101, 2020.
- [41] A. C. Briozzo. Determination of unknown thermal coefficients in a Stefan problem for Storm’s type materials. *Computational and Applied Mathematics*, 2018.
- [42] A. C. Briozzo. Supercooled Stefan problem with a Neumann type boundary condition. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2020:1–14, 2020.
- [43] A. C. Briozzo and M. F. Natale. One-dimensional nonlinear Stefan problems in Storm’s materials. *Mathematics*, 2:1–11, 2014.
- [44] A. C. Briozzo and M. F. Natale. Two Stefan problems for a non-classical heat equation with nonlinear thermal coefficients. *Differential and Integral Equations*, 27:1187–1202, 2014.
- [45] A. C. Briozzo and M. F. Natale. One-phase Stefan problem with temperature-dependent thermal conductivity and a boundary condition of Robin type. *Journal of Applied Analysis*, 21-2:89–97, 2015.
- [46] A. C. Briozzo and M. F. Natale. Nonlinear Stefan problem with convective boundary condition in Storm’s materials. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 67-19:1–11, 2016.
- [47] A. C. Briozzo and M. F. Natale. Non-classical Stefan problem with nonlinear thermal coefficients and a Robin boundary condition. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 49:159–168, 2019.
- [48] A. C. Briozzo and M. F. Natale. On a two-phase Stefan problem with convective boundary condition including a density jump at the free boundary. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43:3744–3753, 2020.
- [49] A. C. Briozzo and M. F. Natale. Two-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficients and a convective boundary condition. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 58, 2021.
- [50] A. C. Briozzo, M. F. Natale, and D. A. Tarzia. Determination of unknown thermal coefficients for Storm’s-type materials through a phase-change process. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34:329–340, 1999.

- [51] A. C. Briozzo, M. F. Natale, and D. A. Tarzia. Existence of an exact solution for a one-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficients from Tirskaa's method. *Nonlinear Analysis*, 67:1989–1998, 2007.
- [52] A. C. Briozzo, M. F. Natale, and D. A. Tarzia. Explicit solutions for a two-phase unidimensional Lamé-Clapeyron-Stefan problem with source terms in both phases. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 329:145–162, 2007.
- [53] A. C. Briozzo, M. F. Natale, and D. A. Tarzia. The Stefan problem with temperature-dependent thermal conductivity and a convective term with a convective condition at the fixed face. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 9:1209–1220, 2010.
- [54] A. C. Briozzo, C. Rogers, and D. A. Tarzia. A class of moving boundary problems with a source term: Application of a reciprocal transformation. *Acta Mechanica*, 2023, 2023.
- [55] A. C. Briozzo and D. A. Tarzia. Existence and uniqueness of a one-phase Stefan problem for a non-classical heat equation with temperature boundary condition at the fixed face. *Electronic Journal of Differential Equations*, 21:1–16, 2006.
- [56] A. C. Briozzo and D. A. Tarzia. Exact solutions for non-classical Stefan problems. *International Journal of Differential Equations*, 2010:1–19, 2010.
- [57] A. C. Briozzo and D. A. Tarzia. A free boundary problem for a diffusion-convection equation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 120, 2020.
- [58] P. Broadbridge. Non-integrability of non-linear diffusion-convection equations in two spatial dimensions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 19:1245–1257, 1986.
- [59] P. Broadbridge. Integrable forms of the one-dimensional flow equation for unsaturated heterogeneous porous media. *Journal of Physics*, 29:622–627, 1988.
- [60] F. Brosa Planella, C. P. Please, and R. A. Van Gorder. Extended Stefan problem for the solidification of binary alloys in a sphere. *European Journal of Applied Mathematics*, pages 1–38, 2021.
- [61] R. Brügger and H. Harbrecht. On the reformulation of the classical Stefan problem as a shape optimization problem. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 60:310–329, 2022.
- [62] J. R. Cannon. *The one-dimensional heat equation*. Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1984.
- [63] J. R. Cannon and H. M. Yin. A class of non-linear non-classical parabolic equations. *Journal of Differential Equations*, 79:266–288, 1989.
- [64] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger. *Conduction of heat in solids*. Clarendon Press, Oxford, 1959.

- [65] A. N. Ceretani, N. N. Salva, and D. A. Tarzia. Existence and uniqueness of the modified error function. *Applied Mathematics Letters*, 70:14–17, 2017.
- [66] A. N. Ceretani, N. N. Salva, and D. A. Tarzia. An exact solution to a Stefan problem with variable thermal conductivity and a Robin boundary condition. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 40:243–259, 2018.
- [67] A. N. Ceretani, N. N. Salva, and D. A. Tarzia. Auxiliary functions in the study of Stefan-like problems with variable thermal properties. *Applied Mathematics Letters*, 104:1–6, 2020.
- [68] A. N. Ceretani and D. A. Tarzia. Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through a mushy zone model with an overspecified convective boundary condition. *JP Journal of Heat and Mass Transfer*, 13-2:277–301, 2016.
- [69] A. N. Ceretani, D. A. Tarzia, and L. T. Villa. Explicit solutions for a non-classical heat conduction problem for a semi-infinite strip with a non-uniform heat source. *Boundary Value Problems*, 156:1–26, 2015.
- [70] J. M. Chadam and H. Rasmussen (Eds). *Free boundary problems involving solids*, Pitman Research Notes in Mathematics Series 281. Longman, Essex, 1993.
- [71] V. Chaurasiya, K. N. Rai, and J. Singh. Heat transfer analysis for the solidification of a binary eutectic system under imposed movement of the material. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 147:3229–3246, 2022.
- [72] R. M. Cherniha and N. D. Cherniha. Exact solutions of a class of nonlinear boundary value problems with moving boundaries. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 26:L935–L940, 1993.
- [73] S. H. Cho and J. E. Sunderland. Phase-change problems with temperature-dependent thermal conductivity. *Journal of Heat Transfer*, 96-2:214–217, 1974.
- [74] J. Crank. *The mathematics of diffusion*. Clarendon Press, Oxford, 1956.
- [75] J. Crank. *Free and moving boundary problems*. Clarendon Press, Oxford, 1984.
- [76] V. Cregan, J. Williams, and T. G. Myers. Contact melting of a rectangular block with temperature-dependent properties. *International Journal of Thermal Sciences*, 150, 2020.
- [77] M. P. Dalwadi, S. L. Waters, H. M. Byrne, and I. J. Hewitt. A Mathematical framework for developing freezing protocols in the cryopreservation of cells. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 80:667–689, 2020.
- [78] M. Deiaa, W. S. Elbeshbeeshya, I. L. El-Kalla, and A. Elsaid. The solution of one-phase Stefan-like problems with a forcing term by moving Taylor series. *Matrix Science Mathematic*, 6(1), 2022.
- [79] B. B. Dhage. Global attractivity results for nonlinear functional integral equations via a Krasnoselskii type fixed point theorem. *Nonlinear Analysis*, 70:2485–2493, 2009.

- [80] B. B. Dhage. Some characterization of nonlinear first order differential equations of unbounded intervals. *Differential Equations and Applications*, 2:151–162, 2010.
- [81] J. I. Diaz, M. A. Herrero, A. Liñan, and J. L. Vazquez (Eds). *Free boundary problems: theory and applications, Pitman Research Notes in Mathematics Series 323*. Longman, Essex, 1995.
- [82] C. Ding, Z. Niu, B. Li, D. Hong, Z. Zhang, and M. Yu. Analytical modeling and thermal performance analysis of a flat plate latent heat storage unit. *Applied Thermal Engineering*, 179, 2000.
- [83] T. Dokoza, D. Plümacher, M. Smuda, C. Jegust, and M. Oberlack. Solution to the 1D Stefan problem using the unified transform method. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 54(37), 2021.
- [84] F. Du, P. Ke, and P. Hong. How ploughing and frictional melting regulate ice-skating friction. *Friction*, 2023, 2023.
- [85] A. Elsaid and S. M. Helal. Moving Taylor series solving one-dimensional one-phase Stefan problem. *Alexandria Engineering Journal*, 61:7121–7128, 2022.
- [86] A. Fabre and J. Hristov. On the integral-balance approach to the transient heat conduction with linearly temperature-dependent thermal diffusivity. *Heat Mass Transfer*, 53:177–204, 2017.
- [87] A. S. Fokas and Y. C. Yortsos. On the exactly solvable equation  $s_t = [(\beta s + \gamma)^{-2} s_x]_x + \alpha(\beta s + \gamma)^{-2} s_x$  occurring in two-phase flow in porous media. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 42:318–331, 1982.
- [88] A. Friedman and L. S. Jiang. Periodic solutions for a thermostat control problem. *Communications in Partial Differential Equations*, 13:515–550, 1988.
- [89] H. Furuya, K. Miyashiba, and N. Kenmochi. Asymptotic behavior of solutions of a class of nonlinear evolution equations. *Journal of Differential Equations*, 62:73–94, 1988.
- [90] G. Garguichevich, C. Sanziel, and D. A. Tarzia. Comparison of approximate methods for the determination of thermal coefficients through a phase-change problem. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 12:451–464, 1985.
- [91] C. M. Gariboldi and D. A. Tarzia. Distributed optimal control problems for a class of elliptic hemivariational inequalities with a parameter and its asymptotic behavior. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 104:1–9, 2021.
- [92] R. Garra, F. Falcini, V. R. Voller, and G. Pagnini. A generalized Stefan model accounting for system memory and non-locality. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 114, 2020.
- [93] K. Glashoff and J. Sprekels. An application of Glicksberg’s theorem to a set-value integral equations arising in the theory of thermostats. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 12:477–486, 1981.

- [94] K. Glashoff and J. Sprekels. The regulation of temperature by thermostats and set-value integral equations. *Journal of Integral Equations*, 4:95–112, 1982.
- [95] A. M. Gonzalez and D. A. Tarzia. Determination of unknown coefficients of a semi-infinite material through a simple mushy zone model for the two-phase Stefan problem. *International Journal of Engineering Science*, 34:799–817, 1996.
- [96] T. R. Goodman. The heat balance integral methods and its application to problems involving a change of phase. *Transactions of the ASME*, 80:335–342, 1958.
- [97] T. Gul, R. S. Gul, W. Noman, F. Hussain, and I. S. Amiri. Controlling of the melting through porous medium and magnetic field. *Measurement and Control*, 54:779–789, 2020.
- [98] S. C. Gupta. *The classical Stefan problem. Basic concepts, modelling and analysis*. Elsevier, Amsterdam, 2017.
- [99] S. C. Gupta. *The classical Stefan problem. Basic concepts, Modelling and Analysis with Quasi-Analytical Solutions and Methods*. Elsevier, Amsterdam, 2018.
- [100] J. M. Hill. The Stefan problem in nonlinear heat conduction. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 37:206–229, 1986.
- [101] J. M. Hill and J. N. Dewynnw. *Heat Conduction*. Blackwell Scientific Publications, 1987.
- [102] J. Hristov. The heat-balance integral method by a parabolic profile with unspecified exponent: analysis and benchmark exercises. *Thermal Science*, 13:27–48, 2009.
- [103] J. Hristov. Research note on a parabolic heat-balance integral method with unspecified exponent: An entropy generation approach in optimal profile determination. *Thermal Science*, 13:49–59, 2009.
- [104] J. Hristov. An approximate analytical (integral-balance) solution to a non-linear heat diffusion equation. *Thermal Science*, 19:723–733, 2015.
- [105] J. Hristov. Integral solutions to transient nonlinear heat (mass) diffusion with a power-law diffusivity: a semi-infinite medium with fixed boundary conditions. *Heat Mass Transfer*, 52:635–655, 2016.
- [106] J. Hristov. Multiple integral-balance method: Basic Idea and Example with Mullin’s Model of Thermal Grooving. *Thermal Science*, 21:1555–1560, 2017.
- [107] J. Hristov. *On the nonlinear diffusion with exponential concentration-dependent diffusivity: Integral-balance solutions and analyzes*, chapter 3, A closer look at the diffusion equation, pages 55–92. J. Hristov (Ed.), Nova Science Publishers, Inc., 2020.
- [108] J. Hristov. Integral-balance method with transmuted profiles: Concept, examples, and emerging problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 416:114547, 2022.

- [109] J. Hristov. On a non-linear diffusion model of wood impregnation: Analysis, approximate solutions, and experiments with relaxing boundary conditions. In J. Singh, G. A. Anastassiou, D. Baleanu, C. Cattani, and D. Kumar, editors, *Advances in Mathematical Modelling, Applied Analysis and Computation*, pages 25–53, Singapore, 2023. Springer Nature Singapore.
- [110] A. Jain and M. Parhizi. Conditionally Exact Closed-Form Solution for Moving Boundary Problems in Heat and Mass Transfer in the Presence of Advection. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 180, 2021.
- [111] S. A. Kassabek, S. N. Kharin, and D. Suragan. A heat polynomial method for inverse cylindrical one-phase Stefan problems. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 29:3423–3450, 2021.
- [112] S. A. Kassabek and D. Suragan. Numerical approximation of the one-dimensional inverse Cauchy-Stefan problem using heat polynomials methods. *Computational and Applied Mathematics*, 41, 2022.
- [113] N. Kenmochi. Heat conduction with a class of automatic heat source controls. *Pitman Research Notes in Mathematics Series*, 186:471–474, 1990.
- [114] N. Kenmochi and M. Primicerio. One-dimensional heat conduction with a class of automatic source controls. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 40:205–216, 1998.
- [115] N. Kenmochi (Eds). *Free Boundary Problems: Theory and Applications, I,II*. Gakuto International Series: Mathematical Sciences and Applications, Gakkotosho, 2000.
- [116] S. N. Kharin and T. A. Nauryz. Solution of two-phase cylindrical direct Stefan problem by using special functions in electrical contact processes. *International Journal of Applied Mathematics*, 34:237–248, 2021.
- [117] J. H. Knight and J. R. Philip. Exact solutions in nonlinear diffusion. *Journal Engineering Mathematics*, 8:219–227, 1974.
- [118] O. K. Koriko and I. L. Animasaun. New similarity solution of micropolar fluid flow problem over an UHSPR in the presence of quartic kind of autocatalytic chemical reaction. *Frontiers in Heat and Mass Transfer*, 2017.
- [119] F. Kreith and M. S. Bohn. *Principios de Transferencia de Calor*. Thomson Learning, México, 2001.
- [120] A. Kumar, A. K. Singh, and R. Rajeev. Exact and approximate solutions of a phase change problem with moving phase change material and variable thermal coefficients. *Journal of King Saud University - Science*, 31:1318–1325, 2019.
- [121] A. Kumar, A. K. Singh, and R. Rajeev. A Stefan problem with variable thermal coefficients and moving phase change material. *Journal of King Saud University Science*, 31:1064–1069, 2019.
- [122] A. Kumar, A. K. Singh, and R. Rajeev. A freezing problem with varying thermal coefficients and convective boundary condition. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 148, 2020.

- [123] A. Kumar, A. K. Singh, and R. Rajeev. A moving boundary problem with variable specific heat and thermal conductivity. *Journal of King Saud University - Science*, 32:384–389, 2020.
- [124] A. Kumar, A. K. Singh, and R. Rajeev. A Stefan problem with moving phase change material, variable thermal conductivity and periodic boundary condition. *Applied Mathematics and Computations*, 386, 2020.
- [125] A. Kumar, A. K. Singh, and R. Rajeev. A Stefan problem with temperature and time dependent thermal conductivity. *Journal of King Saud University - Science*, 32:97–101, 2020.
- [126] G. Lamé and B. P. E. Clapeyron. Memoire sur la solidification par refroidissement d’un globe liquide. *Annales de Chimie et de Physique*, 47:250–256, 1831.
- [127] N. Liao. On the logarithmic type boundary modulus of continuity for the Stefan problem: To the memory of Emmanuele DiBenedetto. *Advances in Mathematics*, 408, 2022.
- [128] Z. Liu, J. Houa, Y. Huang, J. Zhang, X. Meng, and B. J. Dewancker. Influence of phase change material (PCM) parameters on the thermal performance of light-weight building walls with different thermal resistances. *Case Studies in Thermal Engineering*, 2022.
- [129] H. Lu, S. Xie, and Y. Chen. Analysis of Solutions to a Free Boundary Problem with a Nonlinear Gradient Absorption. *Symmetry*, 14, 2022.
- [130] V. J. Lunardini. *Heat transfer with freezing and thawing*. Elsevier Science Publishers B. V., 1991.
- [131] M. MacDevette and T. Myers. Nanofluids: An innovative phase change material for cold storage systems? *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 92:550–557, 2016.
- [132] O. D. Makinde, N. Sandeep, T. M. Ajayi, and I. L. Animasaun. Numerical exploration of heat transfer and Lorentz force effects on the flow of MHD Casson fluid over an upper horizontal surface of a thermally stratified melting surface of a paraboloid of revolution. *International Journal of Sciences and Numerical Simulation*, 19:93–106, 2018.
- [133] S. L. Mitchell. Applying the combined integral method to one-dimensional ablation. *Applied Mathematical Modelling*, 36:127–138, 2012.
- [134] S. L. Mitchell. Applying the combined integral method to two-phase Stefan problems with delayed onset of phase change. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 28:58–73, 2015.
- [135] S. L. Mitchell, N. P. McInerney, and S. B. G. O’Brien. Approximate solution techniques for the sorption of a finite amount of swelling solvent in a glass polymer. *Applied Mathematical Modelling*, 92:624–650, 2021.

- [136] S. L. Mitchell and T. Myers. Application of Standard and Refined Heat Balance Integral Methods to One-Dimensional Stefan Problems. *SIAM Review*, 52:57–86, 2010.
- [137] S. L. Mitchell and T. Myers. Improving the accuracy of heat balance integral methods applied to thermal problems with time dependent boundary conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53:3540–3551, 2010.
- [138] S. L. Mitchell and T. Myers. Application of heat balance integral methods to one-dimensional phase change problems. *Applied Mathematics and Computation*, 2012:1–22, 2012.
- [139] S. L. Mitchell and B. G. O’Brien. Asymptotic and numerical solutions of a free boundary problem for the sorption of a finite amount of solvent into a glassy polymer. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 74:697–723, 2014.
- [140] F. Mosally, A. Wood, and A. Al-Fhaid. An exponential heat balance integral method. *Applied Mathematics and Computation*, 130:87–100, 2002.
- [141] A. Munier, J. R. Burgan, J. Gutierrez, E. Fijalkow, and M. R. Feix. Group transformations and the nonlinear heat diffusion equation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 40:191–207, 1981.
- [142] S. B. Myers. Banach spaces of continuous functions. *Annals of Mathematics*, 49:132–140, 1948.
- [143] P. Nanda, G. M. M. Reddy, and M. Vynnycky. Inverse two-phase nonlinear Stefan and Cauchy-Stefan problems: A phase-wise approach. *Computers and Mathematics with Applications*, 123:216–226, 2022.
- [144] M. F. Natale, E. A. Santillan Marcus, and D. A. Tarzia. Explicit solutions for one-dimensional two-phase free boundary problems with either shrinkage or expansion. *Non-linear Analysis: Real World Applications*, 11:1946–1952, 2010.
- [145] M. F. Natale and D. A. Tarzia. Explicit solutions to the two-phase Stefan problem for Storm-type materials. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 33:395–404, 2000.
- [146] M. F. Natale and D. A. Tarzia. Explicit solutions to the one-phase Stefan problem with temperature-dependent thermal conductivity and a convective term. *International Journal of Engineering Science*, 41:1685–1698, 2003.
- [147] M. F. Natale and D. A. Tarzia. Explicit solutions for a one-phase Stefan problem with temperature-dependent thermal conductivity. *Bollettino U.M.I.*, 8:79–99, 2006.
- [148] M. F. Natale and D. A. Tarzia. The classical one-phase Stefan problem with temperature-dependent thermal conductivity and a convective term. *MAT - Serie A*, 15:1–16, 2008.
- [149] T. Nauryz. Nonlinear Stefan problem for one-phase generalized heat equation with heat flux and convective boundary condition. *Research Square*, 2022.



- [150] T. Nauryz and S. Kharin. Existence and uniqueness for one-phase spherical Stefan problem with nonlinear thermal coefficients and heat flux condition. *International Journal of Applied Mathematics*, 35:645–659, 2022.
- [151] M. Ndiaye, P. Myler, and B. K. Kandola. Thermoplastic Composites: Modelling Melting, Decomposition and Combustion of Matrix Polymers. *Journal of Composites Sciences*, 6, 2022.
- [152] D. L. R. Oliver and J. E. Sunderland. A phase-change problem with temperature-dependent thermal conductivity and specific heat. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 30:2657–2661, 1987.
- [153] M. Pakdemirli and M. Yurusoy. Similarity transformations for partial differential equations. *SIAM Review*, 40, 1998.
- [154] K. Parand, G. S. Ghaemi Javid, and M. Jani. A machine learning approach for solving inverse Stefan problem. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 13(2):2233–2246, 2022.
- [155] M. Parhizi and A. Jain. Eigenfunction-based solution for one-dimensional solid-liquid phase change heat transfer problems with advection. *International Journal of Thermal Sciences*, 172, 2022.
- [156] C. L. Pekeris and L. B. Skichter. Problem of ice formation. *Journal of Applied Physics*, 10:135–137, 1939.
- [157] R. Philip. General method of exact solution of the concentration-dependent diffusion equation. *Australian Journal of Physics*, 13:1–12, 1960.
- [158] A. P. Roday and M. J. Kazmiercza. Melting and freezing in a finite slab due to a linearly decreasing free-stream temperature of a convective boundary condition. *Thermal Science*, 13:141–153, 2009.
- [159] C. Rogers. Application of a reciprocal transformation to a two-phase Stefan problem. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 18:L105–L109, 1985.
- [160] C. Rogers. On a class of reciprocal Stefan moving boundary problems. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 66:2069–2079, 2015.
- [161] C. Rogers. On Stefan-type moving boundary problems with heterogeneity: canonical reduction via conjugation of reciprocal transformation. *Acta Mechanica*, 230:839–850, 2019.
- [162] C. Rogers and P. Broadbridge. On a nonlinear moving boundary problem with heterogeneity: Application of reciprocal transformation. *Journal of Applied Mathematics Physics ZAMP*, 39:122–128, 1988.
- [163] L. Rubinstein. *The Stefan problem*. American Mathematical Society, Providence, 1971.
- [164] N. Sadoun, E. Si-Ahmed, and J. Colinet. On the refined integral method for the one-phase Stefan problem with time-dependent boundary conditions. *Applied Mathematical Modelling*, 30:531–544, 2006.

- [165] S. Sadri, M. R. Raveshi, and S. Amiri. Efficiency analysis of straight fin with variable heat transfer coefficient and thermal conductivity. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 26:1283–1290, 2011.
- [166] N. N. Salva and D. A. Tarzia. Explicit solution for a Stefan problem with variable latent heat and constant heat flux boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 379:240–244, 2011.
- [167] N. N. Salva and D. A. Tarzia. A sensitivity analysis for the determination of unknown thermal coefficients through a phase-change process with temperature-dependent thermal conductivity. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 38:418–424, 2011.
- [168] D. Sancho Calderón, S. Ortiz Palacio, S. J. Ibáñez García, and S. Bock. An adjusted analytical solution for thermal design in artificial ground freezing. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 164, 2023.
- [169] G. C. Sander, I. F. Cuning, W. L. Hogarth, and J. Y. Parlange. Exact solution for nonlinear nonhysteretic redistribution in vertical solid of finite depth. *Water Resources Research*, 27:1529–1536, 1991.
- [170] R. D. Santiago-Acosta, E. M. Hernández-Cooper, R. Pérez-Álvarez, and J. A. Otero. Effects of Volume Changes on the Thermal Performance of PCM Layers Subjected to Oscillations of the Ambient Temperature: Transient and Steady Periodic Regimes. *Molecules*, 27, 2022.
- [171] S. Savotchenko and A. Cherniakov. Models of recrystallization activated by a diffusion flow of impurities from a thin-film coating with a convection term at the crystal surface: exact solutions. *Mathematical Modelling of Nature Phenomena*, 18, 2023.
- [172] E. P. Scott. An analytical solution and sensitivity study of sublimation-dehydration within a porous medium with volumetric heating. *Journal of Heat Transfer*, 116:686–693, 1994.
- [173] M. Sofonea, J. Bollati, and D. A. Tarzia. Optimal control of differential quasivariational inequalities with applications in contact mechanics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 493(2):124567, 2021.
- [174] A. D. Solomon. An easily computable solution to a two-phase Stefan problem. *Solar energy*, 33:525–528, 1979.
- [175] J. Stefan. Über die Diffusion von Säuren und Basen gegen einander. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaftliche Classe*, 98:616–634, 1889.
- [176] J. Stefan. Über die Verdampfung und die Auflösung als Vorgänge Diffusion. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaftliche Classe*, 98:1418–1442, 1889.
- [177] J. Stefan. Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaftliche Classe*, 98:473–484, 1889.

- [178] M. L. Storm. Heat Conduction in Simple Metals. *Journal of Applied Physics*, 22(7):940–951, 1951.
- [179] D. A. Tarzia. An inequality for the coefficient  $\sigma$  of the free boundary  $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$  of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 39:491–497, 1981-1982.
- [180] D. A. Tarzia. Determination of the unknown coefficients in the Lamé-Clapeyron-Stefan problem (or one-phase Stefan problem). *Advances in Applied Mathematics*, 3:74–82, 1982.
- [181] D. A. Tarzia. A variant of the heat balance integral method and a new proof of the exponentially fast asymptotic behavior of the solutions in heat conduction problems with absorption. *International Journal of Engineering Science*, 28:1253–1259, 1990.
- [182] D. A. Tarzia. The determination of unknown thermal coefficients through phase-change process with temperature-dependent thermal conductivity. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 25:139–147, 1998.
- [183] D. A. Tarzia. A bibliography on moving-free boundary problems for heat diffusion equation. The Stefan problem. *MAT-Serie A*, 2:1–297, 2000.
- [184] D. A. Tarzia. *Explicit and Approximated Solutions for Heat and Mass Transfer Problems with a Moving Interface*, chapter 20, Advanced Topics in Mass Transfer, pages 439–484. Prof. Mohamed El-Amin (Ed.), In Tech, Rijeka, 2011.
- [185] D. A. Tarzia. Relationship between Neumann solutions for two-phase Lamé-Clapeyron-Stefan problems with convective and temperature boundary conditions. *Thermal Science*, 21-1:187–197, 2017.
- [186] D. A. Tarzia and L. T. Villa. Some nonlinear heat conduction problems for a semi-infinite strip with a non-uniform heat source. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 41:99–114, 1998.
- [187] P. Tritscher and P. Broadbridge. A similarity solution of a multiphase Stefan problem incorporating general non-linear heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 37:2113–2121, 1994.
- [188] G. Umbrich, D. Rubio, and D. A. Tarzia. Estimation of a thermal conductivity in a stationary heat transfer problem with a solid-solid interface. *International Journal of Heat and Technology*, 39:337–344, 2021.
- [189] L. D. Venturato, M. B. Cirelli, and D. A. Tarzia. Explicit solutions related to the Rubinstein binary-alloy solidification problem with a heat flux or a convective condition at the fixed face. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2023.
- [190] L. T. Villa. Problemas de control para una ecuación unidimensional no homogénea del calor. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 32:163–169, 1986.
- [191] V. R. Voller and S. Roscani. A general non-Fourier Stefan problem formulation that accounts for memory effects. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 209, 2023.

- [192] V. R. Voller, J. B. Swenson, and C. Paola. An analytical solution for a Stefan problem with variable latent heat. *International Journal of Heat and Mass transfer*, 47:5387–5390, 2004.
- [193] V. R. Voller, J.B. Swenson, and Paola. C. An analytical solution for a Stefan problem with variable latent heat. *International Journal of Heat and Mass transfer*, 47-24:5387–5390, 2004.
- [194] Z. Wang, H. Zhao, and S. Liu. Numerical Simulation of Aircraft Icing under Local Thermal Protection State. *Aerospace*, 9, 2022.
- [195] H. M. Weber. *Die partiellen Differential-Gleichungen der Mathematischen Physik nach Riemann's Vorlesungen*. Braunschweig, 1901.
- [196] D. G. Wilson and A. D. Solomon. A Stefan-type problem with void formation and its explicit solution. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 37:67–76, 1986.
- [197] A. S. Wood. A new look at the heat balance integral method. *Applied Mathematical Modelling*, 25:815–824, 2001.
- [198] S. Xu, F. Zhang, and Q. Zhou. A free boundary problem for necrotic tumor growth with angiogenesis. *Applicable Analysis*, 102:977–987, 2021.
- [199] F. Yi and X. Han. An one-dimensional two-phase free boundary problem in an angular domain. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 8:959–979, 2007.
- [200] Y. Zhou, W. Bu, and M. Lu. One-dimensional consolidation with a threshold gradient: a Stefan problem with rate-dependent latent heat. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 37:2825–2832, 2013.
- [201] Y. Zhou, Y. J. Wang, and W. K. Bu. Exact solution for a Stefan problem with a latent heat a power function of position. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 69:451–454, 2014.
- [202] S. M. Zubair and M. A. Chaudhry. Exact solution of solid-liquid phase-change heat transfer when subjected to convective boundary conditions. *Wärme und Stoffübertragung*, 30:77–81, 1994.